CHRISTOPHORI CLAUII BAMBERGENSIS ... EPITOME ARITHMETICAE...

Christophorus Clavius




NAZIONALE
BIBLIOTECA
VITT. EMANUELE
12
17 C
35

CHRISTOPHORI CLAVII

BAMBERGENSIS E SOCIETATE IESV



***EPITOME ARITHMETICAE* Practicæ nunc quinto ab ipso auctore anno 1606. recognita, & multis in locis locupletata.**





COLONIAE AGRIPPINAE,
Apud Bernardum Gualtherium.
ANNO M. DC. VII.

Cum sacræ C. Maiestatis priuilegio, & superiorum concessu.



LECTORIS.

CVM omnis me Mathematicarum rerum cognitio delectat, tum verò ex Arithmetica tractatione incredibilem capio voluptatem; idqúe non solum ob eximiam quandam eius dignitatem, sed etiam, quòd sine Arithmetica, vt ego quidem existimo, nulla scientia, vt Plato audet dicere, neque ipsa hominum societas possit consistere. Plurima enim in mutuis commercijs, conuentisqúe, quibus ferè hæc hominum coniunctio continetur, tempora incidunt, vt rationes accepti, & expensi reddendæ, repos cendæve sint, tabulæ conficiendæ, numerus æqualiter, vel inæqualiter, certâ quadam proportione seruatâ, in plures partes diuidendus, summa subducenda; quibus in rebus circumuenire, & circumueniri, æque turpe, & perniciosum est: Itaque audacius illud quidem, sed tamen verè dixit Plato, prudentiam, atque adeò humanitatem omnem è mundo eos tollere, qui Arithmeticam è vita tollant; cùm sine ea neque publicæ, neque priuatæ res constare possint. Iam verò cæteræ disciplinæ sic Arithmeticâ nituntur, vt hæc non videatur concidere posse, quin illæ casu eodem labefactatæ corruant. Neque enim aut Astrologus, aut Geometra theoremata in vulgus probabit sua, vt non solùm veritatem, sed etiam voluptatem habeant cum vtilitate coniunctam, qui vniuersam numerorum naturam animo penitus comprehensam non habuerit: quòd si tantillum in rationibus putandis lapsus fuerit, iam cæterarum rerum ingentem ruinam videas. Atque idcirco

In Epinomide.

In Epinomide, & in 7. de Reip.

princeps ingenij Plato hanc vestibulum, & aditum ad reliquas doctrinas voluit esse, non eâ solùm causâ, quòd illæ sine numeris nullæ sint, verùm etiam quòd numerorum tractatione nitescit animus, & præparatur ad reliquos doctrinæ satus recipiendos. Huius ego præstantissimæ scientiæ pulchritudine captus, olim dederam me ad totam numerorum naturam inuestigandam, vt cum illam animo, scientiaq́; comprehendissem, tum demum literis eam illustrarem, atq; Arithmeticæ præcepta, Algebræq; documenta, (rem ita non omnibus cognitam) quibus in vita præclar... s vix aliquid reperias, ad certa quædam capita, & faciliores demonstrationes reuocarem, vt cuiuis aperta, & prompta essent. Res erat præclara illa quidem, sed multi laboris, atque temporis. Itaque interea dum opus illud à me limatur politiùs, cœpi, quæ ex multorum libris dispersa collegeram, separatim ad meum vsum in commentariolum referre, vt videlicet ad manus mihi essent, meisqúe auditoribus explicarem: qui enim hactenus Arithmeticam tractarunt, ij aut multitudine præceptorum rem perturbarunt, aut breuitate obscurarunt, sic, vt (in quo tamen de nullius existimatione detractum velim) quem in hac scientia magistrum, & ducem tyrones sequantur, vix inueniant. Is libellus cum imprudenti mihi excidisset, & in manus hominum venisset, summis precibus contenderunt à me viri graues, vt eum cum plurimis communicarem, quòd fore dicerent, vt is vtilissimus accideret cũ cæteris studiosis, tum verò ijs, qui nostras scholas frequentant: quorum vtilitati nolle consultum, non esse eius, qui sua, suaq; omnia Dei gloriæ, om-

In 7. de Rep.

niumq́ commodis consecrasset. Horum ego precibus, & auctoritate inductus, hunc libellum typis mandare constitui, quem tu videlicet, Lector, eo animo suscipias velim, quo damus: atque eo tantisper utere, dum maius illud Arithmeticæ opus in lucem exeat, quod pro- diem, Deo iuuante, fore speramus.

Vale.





NVMERATIO INTEGRORVM NVMERORVM.

CAPVT I.

Numeratio quid.



VMERATIO est cuiusuis numeri propositi per proprios characteres, ac figuras descriptio, atque expressio.

Decem figuræ numerorum.

Vtũtur autem Arithmetici decem characteribus, siue figuris ad omnium numerorum descriptionem, videlicet.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0.

quarum priores nouẽ dicuntur significatiuæ. Quælibet enim illarũ tot vnitates significat, quotum ipsa locũ in apposita serie occupat, vt hæc figura 6. significat sex vnitates; quia sexto loco posita est: atque ita de cæteris. Decima autem figura, & vltima nihil per se significat, diciturq; cifra; auget tamen significationem, ac valorem aliarum figurarum, vt ex sequentibus perspicuum fiet.

Quot loca sint in quolibet numero.

In quolibet numero, qui pluribus figuris scribitur tot dicũtur esse loca, quot sunt figuræ siue significatiuæ, siue nõ significatiuæ: primusq. locus, seu prima figura est, quæ extrema est versus dextram; secundus verò locus, seu secunda figura est illa, quæ proximè primam consequitur versus sinistram, atque ita deinceps: adeò vt ille locus, seu figura dicatur

Prima figura, & vltima in quouis numero quæ sit.

catur vltima, quæ primam ſedem ad ſiniſtram occupat. vt hic. 4352. prima figura eſt 2.& vltima 4. Si tamen ſingulæ figuræ ſingulos numeros repræſentent, hoc modo. 4. 3. 5. 2. prima figura erit 4. vltima vero 2. Cur autem ordo locorum, figurarumve in quolibet numero progrediatur à dextrà verſus ſiniſtram, cauſa hæc eſt: quoniam à Phœnicibus inuenta eſſe dicitur Arithmetica, qui ſcribere ſolent à dextra ſiniſtram verſus, more Hebræorum, Arabum, & Chaldæorum.

Ordo locorũ in quouis numero cur à dextra ſiniſtram verſus procedat.

QVAELIBET figura in primo loco poſita ſeipſam ſimpliciter repræſentat, in ſecundo decies ſeipſam ſignificat, in tertio centies, in quarto millies, in quinto decies millies, in ſexto centies millies, in ſeptimo millies millies, atque hoc pacto in infinitum: ita vt loca ordine ſeſe ſuperent in decupla proportione, vt ſecundus primum, tertius ſecundum, quartus tertium, &c. vt hic. 34567. prima figura 7. ſignificat tantum ſeptem vnitates: ſecunda 6. ſignificat ſexaginta, nempe decies 6. tertia 5. quingentas, id eſt, centies 5. quarta 4. quatuor millia vnitatum, hoc eſt, millies 4. quinta 3. triginta millia vnitatum, ſiue decies millies 3. Itaque totus ille numerus ita proferendus erit. Triginta quatuor millia, quingenta, & ſexaginta ſeptem. Eodemq; modo quicunq; alius numerus exprimi poterit, ſi diligenter notetur, quoties quælibet figura ſeipſam ſignificat in varijs locis poſita.

Quid quælibet figura in dato numero ſignificet.

Figuræ in quouis numero ſe ordine ſuperant in decupla proportione.

Cæterùm vt facilior reddatur numeratio,

Quid obseruandum sit, vt datus numerus exprimatur.

distribuendus erit numerus in membra, hoc modo. Supra primam figuram ad manum dextram ponatur punctum: Deinde procedendo versus sinistram, & omissis duabus figuris, supra sequentem figuram quarto loco positã aliud pũctum statuatur: Et sic deinceps, omissis semper duabus figuris sine punctis, supra sequentem figuram punctum scribatur. vt hic factum esse vides.

. . . . .
4232908956̇2800

Quælibet enim figura sub quocunque puncto cum duabus antecedentibus versus sinistram constituit vnum membrum, ita vt singula membra ternis figuris constent, vltimo membro versus sinistram excepto, quod aliquando vnicam figuram habere potest, illam nimirum, quæ sub puncto collocatur; quemadmodum in proposito exemplo in quinque membra distributo contingeret, si vltima hæc figura 4 tolleretur: aliquando verò duas, vt in dato exemplo.

Itaque vt quicunq; numerus enũcietur, satis est, si quodlibet membrum seorsum exprimatur, cuius prima figura vnitates significat, secunda denas vnitatum, & tertia cẽtenas. Sed post pronunciationem cuiusuis membri apponenda est hæc vox [Mille] toties, quot mẽbra sequuntur illud, quod enunciatur, ita tamen, vt primùm ea vox ponatur in recto pluralis numeri, deinde vero semper dicatur [millies] vt mox audies.

Illud porro membrum, quod vltimum est versus

versus sinistram, primum est in enũciatione, & quod primũ est ad partem dextrã, in enũciatione est vltimum. Numerus ergo paulò ante propositus ita pronunciabitur. Primum mẽbrũ 42. sic. Quadraginta duo millia, millies, millies, millies, ita vt vox [mille] quater audiatur, propter quatuor membra, quæ hoc, quod enunciatur, subsequuntur.

Secundum membrum 329. hoc modo. Trecenta, vigintinouem millia, millies, millies.

Tertium membrum 089. ita. Octoginta nouem millia, millies.

Quartum mẽbrum 562. sic. Quingẽta, sexaginta duo millia.

Quintum denique membrum 800. hoc pacto. octingenta.

Facilior adhuc reddetur numeratio, si pro primo puncto ponatur 0. & 1. pro secundo puncto, & 2. pro tertio, & 3. pro quarto, & ita deinceps, vt hic in eodem exemplo factum esse vides.

4 3 2 1 0
42329089562800

Hac enim ratione facile intelligitur, quoties vox [mille] apponenda sit in cuiusque membri enunciatione. Toties enim proferẽda est, quot vnitates in figurâ, quæ supra membrum pronuntiandum posita est, continentur.

Iam verò si more Italorum millena millia appellare velimus Milliones, paucioribus verbis, & fortasse significantiùs, numerũ quẽcunq; propositum exprimemus, si in maiora eum membra distribuamus, hoc, qui sequitur

modo. Supra primam figuram ad manum dextram ponatur o. Deinde, omissis quinque figuris intermedijs, collocetur 1. supra sequentem figuram, quæ septimum locum occupat. Post hanc, omissis rursus quinque figuris, scribatur 2. supra figuram, quę tertium decimum occupat locum. Atq; ita deinceps, omissis semper quinq; figuris, ponatur 3. 4. 5. &c. Vt hic in eodem exemplo factum est.

2 1 0
42329089562800
. .

Quodlibet membrum continet sex figuras (vltimo membro excepto, quod vnicam potest habere figuram, vel duas, vel tres, vel quatuor, vel quinque tantum) quæ omnes simul enunciandæ sunt, & post enunciationem cuiuslibet membri toties dictio [Millio] addenda, quot vnitates sunt in figura supra membrum posita, primo quidé in recto, deinde verò semper in obliquo. Vt autem quodlibet membrum facilius enuncietur, ponendum erit punctum sub quartâ eius figurâ, quod significabit, locum ibi millenarum esse. Igitur superius exemplum ita proferędum erit. Quadraginta duo milliones millionum; trecenta viginti nouem millia millionum, octoginta nouem milliones; quingenta sexaginta duo millia, octingenta.

ADDITIO INTEGRORVM NVmerorum. CAP. II.

Additio quid.

ADditio est duorum, vel plurium numerorum in vnam summam collectio.

Numeri

Numeri addendi ita sunt collocandi, vt vno sub altero posito, primæ figuræ inter se respondeant, item secundæ inter se, & tertiæ, & quartæ, &c. adeo vt defectus figurarum, si quis est, cernatur ex parte sinistrâ. Vt hi numeri addendi, 710654. 8907. 56789. 880. collocandi erunt, vt hic apparet. Numeri addendi quo pacto sint collocandi.

```
710654
  8907
 56789
   880
------
777230
```



Ducta deinde linea sub numeris addendis, adduntur primum omnes primæ figuræ inter se, & numerus cōpositus, si vnica figura scribi potest, sub primis figuris infra lineam ponitur, si verò duabus figuris scribendus est, ponitur sola prima earum, & reliqua seruatur, vt deinde secundis figuris inter se addendis adijciatur. Post hæc adduntur secundæ figuræ eodē modo, additâ prius illâ, quæ seruata est, si qua tamen seruata sit, itemq; tertiæ, quartæ, & aliæ. Quod si ex additione vltimarum figurarum numerus cōponatur duabus figuris scribendus, ponendæ sunt ambæ sub linea, nulla retenta, quòd tunc tota additio peracta sit. Verbi gratia. In primis figuris propositi exempli 0. & 9. faciunt 9. addo 7. fiunt 16. addo 4. fiunt 20. Pono ergo sub primis figuris 0. & seruo 2. Deinde in secundis figuris, ex 2. (quam figuram seruaueram) & 8. fiunt 10. addo 8. fiunt 18. addo 5. fiunt 23. Pono ergo figuram 3. sub secundis Quo pacto fiat additio.

cundis figuris, & retineo 2. Post hæc accedo ad tertias figuras, vbi ex 2. (quam figuram retinueram) & 8. fiunt 10. addo 7. fiunt 17. addo 9. fiunt 26. addo 6. fiunt 32. Pono ergo 2. sub tertijs figuris, & retineo 3. Rursus in quartis figuris, ex 3. (quæ figura retenta erat) & 6. fiunt 9. addo 8. fiunt 17. addo 0. fiunt 17. Pono ergo 7. sub quartis figuris, & seruo 1, quam addo quintis figuris, efficioque 7. Pono igitur 7. sub dictis figuris, & nihil reseruo. Postremo quia in vltimo loco sola hæc figura 7. reperitur, pono eam sub linea, absolutaque erit additio. Quemadmodum autem figuras numerorum addendorum inter se addidimus ab inferioribus versus superiores ascendendo, ita quoque colligi possunt in vnam summam, si à superioribus versus inferiores descendatur.

Quid faciendum sit, quādo ex figuris vnius loci colligitur numerus tribus figuris scribendus.

Quod si quando ex additione figurarum vnius loci excreuerit numerus tribus figuris scribendus ponenda erit prima figura sub illo loco, & reliquæ duæ figuris sequẽtium locorum addendæ, prima videlicet earum figuris proximi loci, & secunda figuris alterius loci: aut certe numerus duabus illis figuris retentis expressus sequentis loci figuris addendus. Vt in apposito exemplo, quoniam ex primis figuris colligitur

6008
5009
4009
308
239
108
108
309
4128
3009
209
308
23752

1  1

ligitur

ligitur numerus hic 102. scribenda erit figura 2. sub primo loco, & figura 0. addenda figuris secundi loci, figura vero 1. figuris tertij loci. Vel totus numerus retentus 10. addendus figuris secundi loci, vt colligatur numerus 15. cuius figura 5. sub secundo loco ponatur, & figura 1. figuris tertij loci addatur, &c. Vtroque enim modo idem semper numerus colligetur. Examinatum autem vides hoc exemplū per abiectionem 9. de quo examine mox dicemus,

Quid faciendum sit, quādo multi numeri addendi sunt.

Recte porro feceris, quando sunt multi numeri addendi, si eos in plures classes distribuas, & ex singulis classibus singulas summas colligas. Nam si demum hasce summas in vnā redigas summam, habebis summam ex omnibus datis numeris collectam, vitabisq; molestiam, quæ in tot figuris in vnam summam colligendis necessariò occurrit. Vt si proximum exemplum in quatuor hasce classes par-

6008	308	108	3009
5009	239	309	209
4009	108	4128	308
15026	655	4545	3526

tiaris, & singularum summas, 15026. 655. 4545. 3526. in vnam summam redigas, efficies summam, 23752. eandem, quam prius colligeramus, vt hic apparet. Perspicuum autem est, hoc posteriori modo non tam facilè errorem posse committi, quam priori, quod in hoc non tot figuræ, quot in illo simul addantur.

15026
655
4545
3526
23752

Post

Prima probatio additionis per 9.

Post absolutam additionem solent Arithmetici eam examinare, sicut & alias operationes, quæ sequuntur, num rectè facta sit, an non. Quod quatuor modis fieri potest in additione. Primùm per abiectionem nouenarij, hoc pacto. Reijciantur 9. ex omnibus numeris addendis, quoties fieri potest, & quod reliquum est, ponatur seorsum. Deinde ex summa collecta reijciantur quoque 9. quoties fieri potest, & quod reliquum est, notetur. Si enim hoc illi priori, quod reliquũ fuit, æquale est, rectè instituta fuit additio: Si vero inæquale, non rectè. Vnde iteranda erit additio, vt error corrigatur. Ita vides in superiori exemplo relictum fuisse numerum 8. post abiectionẽ numeri 9. tam ex omnib' numeris addendis, quàm ex summa collecta, qui numerus 8. collocatus est in cruce quadam in hunc finem constructâ.

Qua ratione ex quouis numero reijciãtur facile 9. quoties fieri potest.

Cæterùm, vt facile abijciantur 9. satis est, vt figuræ numerorum, ac si omnes primum occuparent locum, inter se addantur, & cum primum summa fuerit 9. aut excesserit 9. ita vt duabus figuris scribatur, reijciantur 9. vel duæ illæ figuræ inter se addantur, & summa hæc cum sequenti figurâ addatur eodem modo, &c. Est enim mirabilis hæc proprietas nouenarij, vt si figuras cuiuscunque numeri inter se addas, & ex summa reijcias 9. vel certè, si summa hæc duabus figuris scribitur, duas has figuras in vnam summam colligas, tantundem relinquatur, vel componatur, quantum relinqueretur, si reijceres 9. toties ex toto numero, quoties potes. Vt si ex hoc numero

Mirabilis proprietas nouenarij.

mero 38. reijciantur 9. quoties id fieri potest, nempe quater remanent 2. quater enim 9. faciunt 36. Quod si dicas, 3. & 8. (sumendo figuras eiusdem numeri 38. seorsum) faciunt 11. & reijcias 9. Vel certe dicas. 1. & 1. faciũt 2. (sumendo etiam figuras huius numeri 11. proximè compositi seorsum) habebis eadem 2. quæ prius reliqua fuerunt. Ita quoque si ex hoc numero 41. reijciantur 9. quoties fieri potest, nempe quater, remanent 5. Et si dicas, ex 4. & 1. (sumendo figuras numeri 41. seorsum) fiunt etiam 5. Denique ex numero 78. si abijciantur 9. quoties fieri potest, nempe octies, relinquuntur 6. Et si dicas, 7. & 8. faciunt 15. reijciasq; hinc 9. Vel certè dicas, 1. & 5. faciunt 6. tantundem habebis, quantum prius reliquum fuit. Eademque ratio est de cæteris.

Itaque vt videas, qua ratione examen additionis instituendum sit; examinabimus primum exemplum hoc modo.

710654		
8907	8	8
56789		
880		
777230		

7. & 1. faciunt 8. Additis 6. fiunt 14. id est, 5. Nam 1. & 4. faciunt 5. quantum nimirum relinqueretur, si 9. ex 14. reijcerentur, vt dictum est. Additis 5. ad illa 5. fiunt 10. id est, 1. Additis 4. fiunt 5. Additis 8. fiunt 13. hoc est, 4. additis 7. fiunt 11. (Nam 9. semper omittuntur, cum sint perpetuo abijcienda.) id est, 2.

est, 2. Additis 5. fiunt 7. Additis 6. fiunt 13. hoc est, 4. Additis 7. fiunt 11. id est, 2. Additis 8. fiunt 10. id est, 1. Additis 8. fiunt 9. id est, 0. Nã 9. reijcienda sunt. Remanent autem 8. quę in altera parte crucis colloco. Deinde in summa producta, ex 7. & 7. fiunt 14. id est, 5. Additis, 7. fiunt 12. id est, 3. Additis 2. fiunt 5. Et tandem additis 3. fiunt 8. vt prius, quæ statuo in opposita parte crucis, vt appareat æqualitas numerorum, qui post abiectionem 9. reliqui fuerunt.

Probatio per 9. fallax est. & quare fallax sit.

Quoniam verò hac ratione non reijciuntur 9. quoties fieri potest, sed tantum per dictam proprietatem nouenarij inquiritur residuum, quod remaneret, si omnia 9. reijcerentur, fit, vt hoc examẽ per abiectionem 9. institutum fallax sit; vt in hoc exemplo apparet. Nam summa collecta falsa est, & nihilominus examen per 9. institutum indicat, eam rectè collectã esse, cum vtrobique vnitas supersit: Quòd si reijciantur 9. quoties fieri potest, statim apparebit falsitas summæ collectæ. Sæpius enim reijcientur 9. ex summa, quàm ex numeris additis. In summa enim hac 64. continentur 9. septies, superestque vnitas, propterea quod septies 9. sunt 63. At in numero 25. continentur 9. bis, & supersunt 7. quæ ad partem dextram repono. In 30. vero continentur 9. ter & supersunt 3. quæ etiam ex parte dextra noto. Itaque ex numeris additis reijciuntur 9. quinquies, & supersunt 7. & 3. in quibus adhuc semel continẽtur 9. supersteq;

25	7
30	3
64	1

1 X 1

pereſtque vnitas, adeò vt verè ſexies tantum reiecta ſint 9. ex numeris additis, ex ſumma verò ſepties. Vnde mirum non eſt, ſummam eſſe falſam, quanuis ſemper reliqua fuerit vnitas. Vera autem ſumma eſſet hæc 55. in quâ continentur 9. ſexies, & ſupereſt vnitas, quẽadmodum in numeris additis.

Eodem pacto, ſi quis poſt ſummã rectè collectam permutaret aliquas figuras, vel interponeret figuris ſiue ſummæ, ſiue numerorum addendorum hanc figuram 9. aut 0. quoties voluerit, vel haſce duas 7. 2. aut 6. 3. aut 4. 5. aut 8. 1. ſemper indicaret examẽ, ſummam adhuc recte eſſe collectam: quod tamen falſum eſt. Nã poſtquam hæc additio rectè cũ ſuo examine inſtituta fuerit, ſi quis per calumniam ita permutaret sũmam 1565. adhuc haberet examẽ ſuã vim, & tamen ſumma vera non eſſet. Idem dices, ſi ordinem figurarum in numeris addendis quis permutaret: vel certè interponeret hanc figuram 9. aut 0. vt hic apparet.

1425		
230	8	8
1655		

14925		
2309	8	8
10655		

Hæc cùm ita ſint, meritò quis roget, cur ab Arithmeticis hæc probatio per 9. adhibeatur. Cui reſpondendum eſt, licet per calumniam hæc probatio oſtendatur eſſe vitioſa, vt in proximis exemplis patuit, non immeritò tamen à peritis Arithmeticis eã vſurpari. Nã nemo, (niſi quis deditâ operâ errare velit) ta-

Cur ab Arithmeticis probatio per 9. adhibeatur, cum fallax ſit.

lem errorem committet, vt examen istud locum habeat, sed solum vnâ, aut alterâ vnitate à scopo aberrabit; ita vt facilè tunc examen hoc ostendat, errorem fuisse commissum, indicetque proinde, corrigendam esse additionem. Quis enim ita insanus fuerit, vt vltimam illam summam ex primis duobus numeris colligat? Denique nisi de industria numeri ita disponantur, vt reiectis 9. semper idem residuum sit, vix aut raro admodum continget, vt examen istud succedat, nisi quando in additione erratum non fuerit.

Secunda probatio additionis per 7.

Alio modo fit examen per abiectionem septenarij, hoc pacto. Reijciantur 7. ex omnibus numeris addendis, quoties fieri potest, & id, quod superest, seorsum ponatur in vnâ parte crucis. Deinde ex summa collecta reijciantur quoque 7. quoties fieri potest, ac residuum in altera parte crucis collocetur. Si enim hoc illi priori residuo fuerit æquale, rectè facta est additio; si verò inæquale, non rectè. Reijcienda autem sunt 7. ex singulis numeris addendis seorsum, residuaq; ad dexteram è regione ipsorũ locanda, & ex his residuis in vnam summã collectis etiam abijcienda 7. atque hoc vltimum residuum in vna parte crucis ponendum. Cæterùm non eodẽ modo reijcienda sunt 7. quo abicijenda esse 9. diximus, cum hic numerus 7. illam proprietatem nouenarij non habeat: sed assumendæ

Quo pacto reijcienda sint 7. ex quolibet numero.

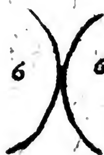
sunt duę figurę primæ ad sinistram, ac si prior earum denas, & posterior vnitates significaret, dummodo prior minor sit, quàm 7. (Nam si esset 7. vel maior, reijcienda forent 7. ex illa so-

la so-

la ſola.) & ex eo numero, quem duæ illæ figuræ referunt, abijcienda 7. quoties fieri poteſt, & reſiduum pro denis accipiendum, eiq; ſequens figura addenda pro vnitatibus, atque ex hoc numero, quem reſiduum, & ſequens figura exprimunt, iterum abijcienda 7. quoties fieri poteſt, atque ita deinceps. Vt ex numero 2379. ita reijcientur 7. Ex 23. ſi ter abijciantur 7. remanent 2. Item ſi ex 27 (Nam figura 2. relicta, & ſequens figura 7. conſtituunt hũc numerum 27.) reijciantur ter 7. relinquuntur 6. Si tandem ex 69 (qui numerus conſtituitur ex reſiduo 6. & figura 9.) reijciantur 7. quoties fieri poteſt, remanent 6. Qui numerus etiam reliquus fuiſſet, ſi omnia 7. ex dato numero fuiſſent abiecta. Eodem modo ex hoc numero 783. ita abijcientur 7. Si ex 8. (Nam 7. omittuntur, vt dictum eſt, & ex 8. reijciuntur 7.) abijciantur 7. remanet 1. Rurſus ſi ex 13. reijciantur 7. remanent 6. atque ita de cæteris.

Itaque hac ratione ſuperius exemplum examinabitur.

710654	0
8907	3
50789	5
880	5
771230	



Omiſſa figura 7. ſi ex 10. abijciantur 7. remanent 3. Item ſi ex 36. abijciantur 7. remanet 1. Abiectis verò 7. ex 15. remanet 1. Abiectis tandem 7. ex 14. remanet 0. quam figuram colloco ad dexteram primi numeri ducta prius

ctâ prius lineâ, quæ numeros ac[illegible]los distinguat à figuris ad dexteram collocand[illegible] Deinde in secundo numero abiecti[illegible] ex 8. remanet 1. abiectis item 7. ex 19. remanent 5. Abiectis quoque 7. ex 50. remanet 1. Denique abiectis 7. ex 17. remanent 3. quæ ad dexteram repono. Rursus in tertio numero abiectis 7. ex 56. remanet 0. Omissa deinde figura 7. & abiectis 7. ex 8. remanet 1. Abiectis denique 7. ex 19. remanent 5. ad dexteram collocanda. In quarto denique numero, abiectis 7. ex 8. remanet 1. Abiectis autem 7. ex 18. remanent 4. Et abiectis 7. ex 40. remanent 5. ad dexteram ponenda. Quoniam vero 5. 5. 3. & 0. efficiunt 13. ex quibus si abijciantur 7. remanent 6. repono 6. in vna parte crucis. Sed ex hisce residuis facilius reijcientur 7. si dicatur 5. & 5. efficiunt 10. Abiectis 7. remanent 3. Additis 3. fiunt 6. quemadmodũ supra de abiectione 9. dictũ est. Postremo in sũma, omissis 7. 7. 7. si ex 23. abijciãtur 7. remanent 2. Itẽ si ex 20. abijciantur 7. remanent 6. in altera parte crucis reponẽda.

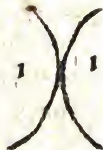
Probatio per 7. fallax est, sed minus, quã probatio per nouem, & quare.

Verum quemadmodum examen per abiectionem 9. fallax est, vt diximus, ita quoque hoc per abiectionem 7. vitiosum esse deprehenditur: quia non consideramus, an toties reijciantur 7. ex numeris addendis, quoties ex summa, necne; sed solum, an idem residuum vtrobiq; reperiatur, an non. Nihilominus tamen non sine ratione huiusmodi examen ab Arithmeticis adhiberi solet, quemadmodum & illud prius per abiectionem 9. institutum, ob rationẽ supradictá: quia, nisi quis per calumniam

calumniam numeros peruertat, vix aut raro idem residuum vtrobiq; reperietur, nisi recte facta sit additio: Et multo quidē rarius in hoc quā in illo examine per 9. instituto, propterea quod non ita simpliciter reijciuntur 7. vt 9. sed maiori quodam artificio: vt non tā facile quis aliū possit decipere, aut ab alio decipi.

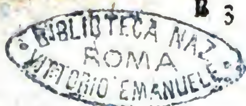
In hoc apposito exemplo additio vitiosa est, & tamen examē per abiectionem 7. indicat, eam ritè esse institutam.

203	0
134	1
344	



Proposita autem hæc tabella docet, ex quibusnam numeris adiecta 7. nihil relinquunt, vt examen istud per 7. reddatur facilius pro ijs, qui parum in numeris sunt exercitati. Cuius vsus hic est. Si numerus duabus figuris scriptus, ex quo debent reijci 7. in hac tabella reperitur, nihil supererit post abiectionem 7. vt cifræ è regione numerorum huius tabellæ indicant. Si autem non reperitur in hac tabella, accipiendus erit numerus in ea proximè minor. Nam differentia inter hunc, & numerum propositum relinquitur post abiectionem 7. Vt si numerus propositus sit 69. sumendus erit numerus 63. in tabella, qui sex vnitatibus à 69. differt. Reiectis igitur 7. ex 69. remanent 6. Item si propositus numerus sit 37. accipiendus erit in tabella numerus 35. qui duab⁹ vnitatibus superatur à 37.

7	0
14	0
21	0
28	0
35	0
42	0
49	0
56	0
63	0



Reiectis igitur 7. ex 37. supersunt 2. Atque ita de cæteris.

Tertia probatio additionis per additionem.

Tertiò hac ratione Arithmetici additionem factam examinare solent. Si additio facta est ab inferioribus figuris versus superiores, instituunt eandem à superioribus figuris versus inferiores, vel contra: Et si posteriori via eadé prorsus summa colligatur, quę priori inuenta est, non dubitant, quin rectè sit facta additio, propterea quòd incredibile quodammodo sit, si priori modo error aliquis esset commissus, eundem prorsus posteriori via committi, cum alio modo figuræ numerorum inter se additæ sint posteriori via, quá priori. Nam si errauero in additione harum figurarum 5. 2. 9. hoc modo dicendo, 5. & 2, faciunt 7. additis 9. fiunt 15. non tam facile in eundem errorem incidero, si è contrario eas inter se addam. Dicam enim 9. & 2. efficiunt 11. additis 5. fiunt 16. quia operatio aliquo modo variatur.

Potest probatio hæc per additionem ita quoque institui. Diuidantur numeri addendi in duas, aut plures classes, & singularú sum-

710654	56789
8907	880
719561	57669

719561
57669
777230

mæ colligantur. Nam si ex hisce summis vná summam conficias, necesse est, summam hác æqualem

æqualem esse summæ prius collectæ, si erratum non est. Vt si primum exemplum in hæc duo membra distribuatur, & eorum summæ collectæ in vnam redigantur summam, vt hic factum est, prodibit eadẽ summa, quæ prius.

Quarto & vltimo examinari solet additio per subtractionem, hac ratione. Quando duo numeri sunt additi, subtrahatur vteruis eorũ ex summa: quod quo pacto fiat, capite sequẽti docebimus. Si enim numerus ex hac subtractione relictus æqualis fuerit alteri numero addito, argumento est, nullum peccatũ in additione fuisse commissum. Nam si ex 12. & 20. fiunt 32. necesse est, detractis 12. ex 32. relinqui 20. vel detractis 20. ex 32. relinqui 12. Quando verò plures numeri sunt additi, subtrahatur vnus eorum ex summa, & reliqui omnes in vnam summam colligantur. Nam si hæc summa illi residuo fuerit æqualis, rectè facta erit additio. Vel certe, subtracto primo numerorum addendorum ex summa, subtrahatur ex residuo secundus, & ex hoc residuo tertius, & ita deinceps, vltimo excepto. Si enim vltimum residuum vltimo numerorum addendorum æquale fuerit, dubium non est, quin additio rectè facta sit. Atque hoc examen certissimum est, licet sit alijs paulo longius.

Quarta probatio additionis per subtractionem.

SVBTRACTIO INTEGRORVM numerorum. CAP. III.

SVbtractio est minoris numeri ex maiori, vel æqualis ex æquali, subductio.

Subtractio quid.

Vter duorum numerorum maior sit, quo pacto cognoscatur.

Facile autem cognosces, vter duorum numerorum maior sit, ex vltimis eorum figuris. Cui° enim figura vltima maior est, ille numerus maior etiã erit. Vt horum duorum numerorum superior maior est inferiore, quia vltima eius figura 3. maior est, quam 2. vltima figura inferioris.

300234.
2986789

Quod si vltimæ figuræ duorum numerorum sint æquales, ille maior erit, cuius penultima figura maior est. Et si penultimę etiã figuræ sint æquales, ille maior erit numer°, in quo prius occuret maior figura, vt in his exemplis semper numerus superior inferiore maior est.

45078.	700001000.
44986.	700000999.

Sic etiam numerus, qui plures habet figuras, maior est eo, qui pauciores figuras continet, vt hic superior numerus inferiore maior est.

12345
9968

Subtrahendus numerus quo pacto locandus sit.

Numerus subtrahendus sub eo, à quo fieri debet subtractio, ita collocandus est, vt prima figura primæ, secunda secundæ, tertia tertiæ, &c. respondeat: adeo vt defectus figurarum in numero subtrahendo, si quis est, cernatur ex parte sinistra. Vt si numerus 40236. ex numero 3271589. subducendus sit, collocandus erit ille sub hoc, vt hic apparet.

3271589
40236

3231353

Ducta

Ducta deinde linea ſub duobus illis numeris, ſubtrahuntur ſingulæ figuræ inferioris numeri à ſingulis figuris ſuperioris numeri, initio facto à primis figuris; & reſidua ſub linea collocantur eo ordine, quo facta eſt ſubtractio. Quòd ſi in ſuperiori numero aliquæ figuræ non habeant reſpondentes figuras in numero inferiori, ita vt ab illis nihil ſubtrahatur, reponendæ illæ erunt ſub linea. Verbi gratia. Subductis 6. ex 9. remanent 3. ſub linea collocanda. Item ſubductis 3. ex 8. relinquũtur 5. Et demptis 2. ex 5. relinquuntur 3. Subtracta autem figura 0. ex 1. remanet 1. At ſubductis 4. ex 7. remanent 3. Quia vero ex figuris 2. & 3. nihil ſubtrahitur, ponendæ eæ erũt eodem ordine ſub linea.

Subtractio quo modo fiat.

Quando autem figura aliqua inferior maior eſt ſuperiore ſibi reſpondente, ita vt ſubtractio fieri non poſſit, ſeruanda erit hæc regula. A proxima figura ſuperiori verſus ſiniſtram mutuo accipiatur vnitas, quæ decem vnitates ſignificabit reſpectu illius figuræ, à qua ſubtractio fieri non poteſt. Deinde huic vnitati apponatur figura illa, vt fiat numerus duabus figuris ſcribendus, à quo detrahatur illa figura inferior maior: ſed tunc illa figura, à qua mutuo accepta eſt vnitas, reputanda erit vna vnitate minor. Quòd ſi proxima illa figura ſuperior ſit 0. mutuabimur vnitatem ab alia figura verſus ſiniſtram, quæ vnitas ſignificabit 100. vnitates reſpectu illius figuræ, à qua ſubtractio non poteſt fieri: ſed tunc loco figuræ 0. animo reponenda erit figura 9. & figura, à qua mutuo accepta eſt vnitas, vna vni-

Quid agendũ ſit, quando figura inferior maior eſt, quàm ſuperior.

tate minor erit. Ita quoq; si plures huiusmodi figuræ o. antecederent illam, à qua vnitatem mutuamur, cogitandæ essent omnes veluti 9. & illa, quæ mutuo dedit vnitatem, vna vnitate minor. Quæ omnia hoc exemplo fient perspicua.

4500026304827
3929034567892

570991736935

PRIMVM subductis 2. ex 7. remanent 5. Deinde quia 9. detrahi non possunt ex 2. mutuabimur vnitatem ab 8. & ita detractis 9. ex 12. (quem numerum exprimunt 1. quam mutuo accepimus, & 2.) relinquuntur 3. Rursus quia 8. ex 7. (superior enim figura 8. cum mutuo dederit vnitatem, valet tantum 7.) subtrahi nequeunt, mutuabimur vnitatem à 4. & sic subductis 8 ex 17. remanent 9. Post hæc, quia 7. ex 3. (figura enim 4. ob vnitatem mutuo datam valet tantum 3) non possunt auferri, accipiemus mutuo vnitatem à 3. post o. Sed quoniam hæc vnitas valet 100. respectu figuræ 3. à qua non potest fieri subtractio, & nos indigemus tantum 10. necesse est, vt si à 100. mutuemur 10. relinquantur 90. Hinc fit, vt figura 3. valeat tãtum 2. & supra o. reponenda sit animo figura 9. quæ significat 90. respectu figuræ, à qua subtractio fieri non poterat. Itaque subductis 7. ex 13. remanent 6. Et subductis 6. ex 9. (supra o. namque diximus cogitari debere 9.) remanent 3. Quoniam vero 5. ex 2. (Nam figura

gura ſuperior 3. valet tantum 2. vt diximus.) auferri nequeunt, accipiemus mutuo 1. à 6. detrahemuſque 5. ex 12. vt ſuperſint 7. Subductis deinde 4. ex 5. (figura enim 6. valet tantum 5. ob vnitatem mutuo datam) remanet 1. Et quia rurſus 3. ex 2. non poſſunt detrahi, mutuabimur vnitatem à 5. Sed cum hæc vnitas valeat 10000. reſpectu figuræ 2. à qua ſubductio fieri nequit, nos vero indigeamus tantum 10. neceſſe eſt, vt ſi à 10000. mutuemur 10, remaneant 9990. Hinc fit, vt figura 5. valeat ſolum 4. & ſupra ſingulas cifras cogitatione reponenda ſit figura 9. hoc modo, 999. Hæ namque figuræ 999. ſignificant 9990. reſpectu figuræ 2. à qua ſubductio fieri non poterat. Itaque ſubductis 3. ex 12. remanent 9. Et ſubducta figura 0. ex 9. (quam figuram 9. ſupra 10. diximus cogitandam eſſe.) remanent 9. Et ſubductis 9. ex 9 (quam etiam figuram 9. ſupra 0. imaginamur) remanet 0. Item ſubtractis 2. ex 9. (ſupra 0. namque reponenda quoque animo eſt figura 9) ſuperſunt 7. At vero quoniam 9. ſubtrahi non poſſunt ex 4. (Figura enim 5. ob mutuo datam vnitatem valet tantum 4.) mutuabimur 1. à 4. & deducemus 9. ex 14. vt ſuperſint 5. Poſtremo ſubductis 3. ex 3. (Nam figura 4. ob mutuo datam vnitatem valet tantum 3.) remanet 0. quæ figura 0 quia vltima eſt in hoc exemplo, nihilque propterea ſignificat, omittenda eſt.

Hac regula plerique Arithmetici vtuntur, quam nos multo facilius ita proponemus. Quando inferior figura maior eſt ſuperiore,

acci-

Facilior ratio subtractionis, quando figura inferior superiore maior est.

accipiatur differentia inter ipsam, & 10. atque huic differentiæ addatur superior figura, à qua subtractio non poterat fieri, aggregatumque scribatur sub linea. Hoc enim aggregatũ relinqueretur, si figura illa maior auferretur ex numero composito ex 10. & figura illa superiore, à qua non potest fieri subtractio, non secus, ac si vnitas fuisset mutuo accepta: cum figura illa maior primum subtrahatur à 10. vt habeatur differentia inter 10. & illam figurã, deinde residuo, siue differentiæ huic superior figura addatur. Postea ne cogamur vnitatem cogitatione auferre ex superiore figura, à qua mutuo sumpta est implicitè vnitas, addemus proximæ figuræ inferiori versus sinistram vnitatem, & hoc aggregatum ex superiori figura (nulla ex ea prius dempta vnitate) subducemus. Eadem enim semper differentia erit inter inferiorem, ac superiorem figuram, siue ex superiore auferas vnitatem, & inferiori nihil addas, siue ex superiori nihil auferas, & inferiori vnitatem adijcias. Vt propositis hisce duabus figuris 7. 4. si ex 7. tollatur vnitas, erit 2. differentia inter residuum 6. & 4. Et si ex 7. nihil dematur, adijciatur autem vnitas ad 4. eadem differentia 2. erit inter 7. & 5. Atque hoc modo, quotiescunque facta fuerit mentio differentiæ inter 10. & figuram inferiorem, quæ ex superiori non potest subtrahi, addenda erit vnitas proximæ inferiori figuræ versus sinistram. Sed hæc omnia clariora fient ex eodem exemplo, quod hic repetiuimus.

Pri-

4500026304827
3929034567892

570991736935

Primum ſubductis 2. ex 7. ſuperſunt 5. Quia vero 9. ſubtrahi non poſſunt ex 2. ſubtrahemus 9. ex 10. & reliquæ vnitati (quæ differentia eſt inter 10. & 9.) adijciemus 2. vt habeamus 3. pro reſiduo ſub linea ponendo. Hoc facto ſtatim inferiori figuræ 8. addemus 1. propter illam differentiam inter 10. & 9. vt fiant 9. Quæ quoniam rurſus ex 8. non poſſunt ſubduci, detrahemus 9. ex 10. & reliquæ vnitati (quæ rurſus differentia eſt inter 10. & 9.) addemus 8. vt habeamus 9. collocanda ſub linea. Quo peracto, ſtatim inferiori figuræ 7. addemus 1. propter illam differentiam inter 10. & 9. efficiemuſque 8. Quæ quoniam ex 4. demi nequeunt, auferemus 8. ex 10. & reſiduo 2. (hoc eſt, differentiæ inter 10. & 8.) adijciemus 4. vt fiant 6. reponenda infra lineam. Deinde ſtatim inferiori figuræ 6. adiungemus 1. propter differentiam illam inter 10. & 8. efficiemuſque 7. Quæ, quoniam ex 0. ſubtrahi nequeunt, ſubduco ex 10. & reſiduo 3. (id eſt, differentiæ inter 10. & 7.) addo 0. efficioque 3. ponenda ſub linea. Rurſus inferiori figuræ 5. addo 1. propter illam differentiam inter 10. & 7. efficioque 6. Quæ, quoniam ſubduci nequeunt ex 3. detraho ex 10. & reſiduo 4. (id eſt, differentiæ inter 10. & 6.) addo 3. efficioq; 7. infra lineam ſcribenda. His peractis, ſtatim infe-

inferiori figuræ 4. addo 1. propter dictam differentiam inter 10. & 6. facioque 5. quibus subductis ex 6. superest 1. Quia vero in hac subductione mentio facta non est differentiæ inter 10. & 5. cum 5. subduci potuerint ex 6. non addo 1. inferiori figuræ 3. sed eam, quoniam subduci non potest ex 2. subtraho ex 10. & residuo 7. (siue differentiæ inter 10. & 3.) addo ad 2. facioq; 9. locãda sub linea. Post hæc statim figuræ inferiori 0. addo 1. propter differentiam dictam inter 10. & 3. efficio-

4500026304827
3929034567892

5709917736935

que 1. Et quoniam 1. subtrahi non potest ex 0. demo 1. ex 10. residuoque 9. (id est differentiæ inter 10. & 1.) addo 0. efficioque 9. infra lineam reponenda. Postea iterum statim addo 1. figuræ inferiori 9. propter illam differentiam inter 10. & 1. vt habeam 10. quæ, quoniam ex 0. non possunt detrahi, aufero ex 10. residuoque 0. (siue differentiæ inter 10. & 10.) addo 0. facioque 0. pro residuo sub linea collocando. Rursus quam primum inferiori figuræ 2. addo 1. propter dictam differentiam inter 10. & 10. efficioque 3. quæ, cum ex 0. subduci nequeant, subtraho ex 10. residuoque 7. (nempe differentiæ inter 10. & 3.) addo 0. facioque 7. collocanda sub linea. Præterea mox addo 1. ad figuram inferiorem 9. propter differen-

ferentiam illam inter 10. & 3. facioque 10. quæ quoniam ex 5. non poſſunt detrahi, aufero ex 10. ac reſiduo o. (differentiæ nimirum inter 10. & 10.) addo 5. efficioque 5. pro reſiduo ſub linea reponendo. Poſtremo ſtatim figuræ inferiori 3. adijcio 1. propter illam differentiam inter 10. & 10. vt habeam 4. quæ ſubducta ex 4. relinquunt o. quam figuram o quoniam ſuperuacanea eſt in principio numeri ex parte ſiniſtra, omittemus, cum poſita fruſtra locum occuparet.

Aliud Exemplum.

per 7.   per 9.

5   5   4000134 | 3   3

         67823 | 5

         3932311 | 5

In hoc exemplo, quoniam ablatis omnibus figuris inferioribus ex ſuperioribus, vnitas adijcienda eſſet ſequenti figuræ inferiori, quæ nulla eſt, reponemus eam in ſequentē locum: quæ, quoniam auferri nequit ex o. detrahēda erit ex 10. & reſiduum 9. infra lineam ponendum; Ac rurſus vnitas ſequenti loco adijcienda, atque ex 4. auferenda, vt habeatur reſiduū 3. ſub linea collocandum.

Quod ſi numerus ex pluribus numeris, vel plures numeri ex pluribꝰ, vel ex vno numero ſint ſubducendi, colligēdi prius erunt plures numeri illi, à quibus fieri debet ſubtractio, in vnam

Quādo numeri ſunt plures quid agendū.

vnam summam; itemq; plures illi, qui subtrahi debent, inter se addendi, priusquam subtractio instituatur.

Prima probatio subtractionis per 9.

Examen subtractionis quadruplex est. Primum fit per abiectionem 9. Si enim ex superiori numero, à quo facta est subtractio, reijciantur 9. quoties fieri potest, eo modo, quo in additione diximus abijcienda esse 9. & residuum collocetur in vna parte crucis, necesse est, vt idem numerus relinquatur, si abijciantur 9. ex numero subtracto, & ex relicto, quoties fieri potest, nisi in subtractione erratum sit. Ita vides in proximo exemplo ad dextrã, residuum semper esse 3. siue 9. abijcias, quoties potes, ex numero 4000134. à quo facta est subtractio, siue ex numeris 67823. 3932311. simul, quorum ille subtractus est, hic vero reliquus fuit ex subtractione.

Secunda probatio subtractionis per 7.

Secundum examen fit per abiectionem 7. Nam si ex numero, à quo facta est subtractio, reijciantur 7. quoties fieri potest, eo modo, quo in additione diximus abijcienda esse 7. & residuum ponatur in vna parte crucis, necesse est, si subtractio recte facta est, vt idẽ numerus relinquatur, si reijciãtur 7. ex numero subtracto, ponẽdo residuũ ad dextrã illius, & ex numero relicto, ponendo etiã residuũ ad dextrã illius, ac tandem duo hæc residua ad dextram collocata in vnam summam colligantur, & ex ea reijciantur 7. si reijci possunt. Ita in superiori exemplo, reiectis 7. quoties fieri potest, ex numero 4000134. relinquuntur 5. Reiectis autem 7. ex 67823. remanet 0. & abiectis 7. ex 3932311. supersunt 5. quæ addita ad 0.

faci-

faciunt quoque 5. vt in cruce ad ſiniſtram ſuperioris exempli poſita apparet.

Cæterum vtrumque hoc examen fallax eſſe poteſt, ſi quis per calumniã numeros permutet, aut alios numeros apponat, quemadmodum in additione diximus.

TERTIVM examen fit per additionem. Nam ſi numerum reſiduum ſubtracto numero adijcias, neceſſario componetur numerus, à quo ſubtractio facta eſt. vt in hoc exemplo vides. Tertia probatio ſubtractiõis per additionem.

Numerus, à quo fit ſubtractio.	60123.
Numerus ſubtractus.	45678.
Numerus reſiduus.	14445.
Summa ex numero ſubtracto,	60123.

& reſiduo compoſita, æqualis numero, à quo facta eſt ſubtractio.

QVARTVM examen fit per ſubtractionẽ. Facta enim ſubtractione, ſi reſiduum ab eodem numero, à quo facta eſt ſubtractio, auferas, ſupererit neceſſario numerus ſubtractus. Vt in proximo exemplo, ſi numerum reſiduũ 14445. ex numero 60123. detrahas, reliquus erit numerus ſubtractus 45678. vt hic appa-ret. Quarta probatio ſubtractiõis per ſubtractionem.

60123
14445
———
45678

Hæc poſteriora duo examina certiſsima ſunt, nullamque admittere poſſunt fallaciam, aut fraudem.

MVLTIPLICATIO INTEGRORVM numerorum.

CAP. IIII.

Multiplicatio q̃d.

MVLTIPLICATIO est ductus vnius numeri in alium. Tunc autem numerus quilibet in aliũ duci dicitur, cum alter ipsorum toties augetur, quoties in altero continetur vnitas. Vt numerus 6. in numerum 5. vel numerus 5. in numerum 6. duci dicitur, quando numerus 6. quinquies accipitur, vel numerus 5. sexies. quo pacto semper accipientur 30. atq; huiusmodi ductus Multiplicatio appellatur. Itaque numerus ex multiplicatione, siue ducta vnius numeri in alterum procreatus toties vtrumlibet multiplicatorum continebit, quoties alter vnitatem complectitur, vt in dato exemplo manifestũ est. Ex quo fit, Multiplicationem ita quoque describi posse. Multiplicatio duorum numerorum est inuentio numeri, qui toties vtrumuis eorum contineat, quoties alter vnitatem continet.

Vt expedite omnis multiplicatio fiat, necesse est nosse, qui numer⁹ producatur ex ductũ, siue multiplicatione cuiuslibet figuræ numericæ in quamuis aliam figuram, vt ex 7. in 8. vel ex 8. in 7. Item ex 7. in 9. vel ex 9. in 7. &c. Hoc enim si bene tenueris, nullam in multiplicatione senties difficultatem, aut laborem. Id quod assiduo exercitio magis discitur, quàm vllo præcepto. Interim tamen mirifice tibi inseruiet sequens tabula, quæ Pythagorica dici solet, ea fortassis de causa, quòd

quòd Pythagoras eam vel primus excogitauerit, vel certe discipulos suos in ea mirifice exercuerit.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Cōstructio huius tabulæ perfacilis est. Prima enim linea ab 1. incipiens progreditur per continuam additionem vnitatis, vsq; ad 9. vt ex 1. & 1. fiunt 2. Ex 2. & 1. fiunt 3. Ex 3. & 1. fiunt 4. &c. Secunda vero linea à 2. incipit, progrediturq; per continuam additionem 2. Vt ex 2. & 2. fiunt 4. Ex 4. & 2. fiūt 6. Ex 6. & 2. fiunt 8. &c. Ita quoq; tertia linea initium sumit à 3. & per continuam additionem 3. progreditur. Atque eodem modo reliquæ lineæ compositę sunt. Quęlibet enim per cōtinuam additionē eius numeri, à quo incipit, progreditur.

Constructio tabulæ Pythagoricæ.

Vſus tabulæ Pythagoricæ.

Vſus autem eiuſdem tabulæ, quod ad multiplicationem attinet, (infinitos enim alios vſus habet) hic eſt. Propoſitis duabus figuris inter ſe multiplicandis, ſi altera in ſuperiori linea, & altera in ſiniſtro latere ſumatur, & in illa linea deorſum, in hoc vero latere dextrorſum quis progrediatur, reperiet in communi cõcurſu numerum ex multiplicatione duarum illarum figurarum inter ſe productũ. Ita vides ex multiplicatione 7. in 8. vel 8. in 7. produci 56. Item ex 8. in 8 produci 64. & ſic de cæteris.

Regula multiplicãdi figuram in figuram.

Quod ſi huiuſmodi tabula in promptu non ſit, vtendum erit hac regula. Scribatur vna figura ſub altera, & vtriuſque diſtantia à 10. ad latus ponatur. Deinde hæ diſtantiæ inter ſe multiplicentur. Productus enim numerus, ſi vnica figura ſcribitur, dabit primam figurã ſummæ producendæ ex figurarum multiplicatione; ſi vero duabus figuris ſcribitur, ſeruanda erit figura denarum, & prior ponenda pro prima figura ſummæ producendæ. Secunda autem figura eiuſdem huius ſummæ habebitur, ſi alterutra diſtãtia ab altera figura denarum reſeruata addatur, ſi qua ſeruata eſt: Vel certè ſi figuræ propoſitæ inter ſe addãtur, addita prius figura denarum reſeruata, ſi qua ſeruata eſt, dabit prima figura huius aggregati (reiecta ſecũda figura tãquam ſuperuacanea) ſecundam figuram ſummæ producendæ. Exẽplis res fiet illuſtrior.

9.	1.	8.	2.	7.	3.
8.	2.	8.	2.	6.	4.
7	2	6	4	4	2.

In primo exemplo figuræ multiplicandæ ſunt 9. & 8. earumque diſtantiæ à 10. ſunt 1. & 2. quæ inter ſe multiplicatæ, (erit autem multiplicatio diſtantiarum à 10. facillima, cum minores ſint, quàm figuræ multiplicandæ. De his enim regula hæc intelligenda eſt) dicendo ſemel 2. vel bis 1. faciunt 2. quæ ſub diſtantijs ſcribo pro prima figura ſummæ producendæ. Ablata autem diſtantia 2. ex 9. vel diſtantia 1. ex 8. relinquuntur 7. quæ ſcribo ſub figuris pro ſecunda figura ſummæ producendæ. Quam ſecundam figuram etiam dabit prima figura aggregati figurarum 9. & 8. quod eſt 17. relicta ſecunda 1. tanquam omnino ad hoc negotium inutili. Itaque multiplicatio figurarum 9. & 8. efficit 72.

In ſecundo autem exemplo figuræ propoſitæ ſunt 8. & 8. quarum diſtantiæ à 10. ſunt 2. & 2. His inter ſe multiplicatis, dicendo, bis 2. habebimus 4. pro prima figura ſūmæ producendæ. Dempta autem vtrauis diſtantia ex 8. ſupererunt 6. pro ſecunda figura, quam nobis etiam dabit prima figura aggregati ex 8. & 8. quod eſt 16. relicta ſecunda 1. tanquam ſuperuacanea. Figuræ igitur 8. & 8. inter ſe multiplicatæ faciunt 64.

In tertio denique exemplo figuræ datæ sũt 7. & 6. quarum diſtantiæ à 10. ſunt 3 & 4. Hæ inter ſe multiplicatæ, dicendo, ter 4. vel quater

3. faciunt 12. Prima ergo figura summę producendæ erit 2. secunda vero figura 1. seruanda erit. Deinde ablata distantia 4. ex 7. vel distātia 3. ex 6. supersunt 3. quibus si addatur vnitas, quam seruauimus, fient 4. pro secunda figura summæ producendæ: quam etiam figuram dabit prima figura aggregati ex 7. & 6. addita prius vnitate seruata, quod est 14. omissa prorsus secunda figura 1. Producuntur ergo 42. ex multiplicatione 7. per 6. vel 6. per 7. Eadem ratio in cæteris est dummodo duæ figuræ propositæ inter se additæ superent 10. Alias distantiæ illarum à 10. maiores essent ipsis figuris, ac proinde facilius multiplicarentur figuræ, quàm distantiæ. Rectius tamen feceris, si vsu, & exercitatione memoriter ediscas huiusmodi multiplicationes figurarū inter se, quàm vt vel ad tabulam Pythagoricā, vel ad hanc regulam confugias.

Qua ratione collocandi sint numeri inter se multiplicandi.

Iam vero propositis duobus numeris inter se multiplicandis, scribendus est minor sub maiore, ita vt prima figura respondeat primę figuræ, & secunda secundæ, &c. vt in additione, & subtractione diximus. Quod tamen necessarium non est, cum etiam maior sub minore scribi possit, dicto tamen ordine figurarum seruato. Vt si multiplicanda sint 4300678. per 600394. collocandi erunt numeri altero horum modorum, quamuis primus sit magis vsitatus.

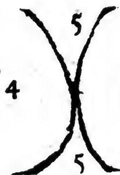
4300678.	Vel.	600394.
600394.		4300678.

Sed doceamus prius, quo pacto numerus aliquis per vnam solam figuram multiplicandus

dus ſit. Ita enim facilius intelligetur, qua ratione numerus per numerum pluriũ figurarũ debeat multiplicari.

Quando ergo numerus aliquis per vnam tantum figuram multiplicãdus eſt, ſolet ſemper figura hæc multiplicans ſubſcribi primæ figuræ numeri multiplicandi. Vt ſi numerus 600394. multiplicandus proponatur per 8. ſic ſtabit exemplum. Multiplicatio autẽ fiet ſi figura 8. multiplicetur per omnes figuras numeri 600394. incipiendo à dextra, & ſiniſtram verſus progrediendo, ſingulosq; numeros productos ſub linea, quæ infra numeros multiplicandos ducitur, ſcribẽdo; ita tamẽ, vt ſi productus aliquis numerus duabus figuris ſcribendus ſit, prima earum ponatur, ſecunda vero ſeruetur ſequẽti producto adijcienda, hoc videlicet modo.

600394.
8.
4803152.



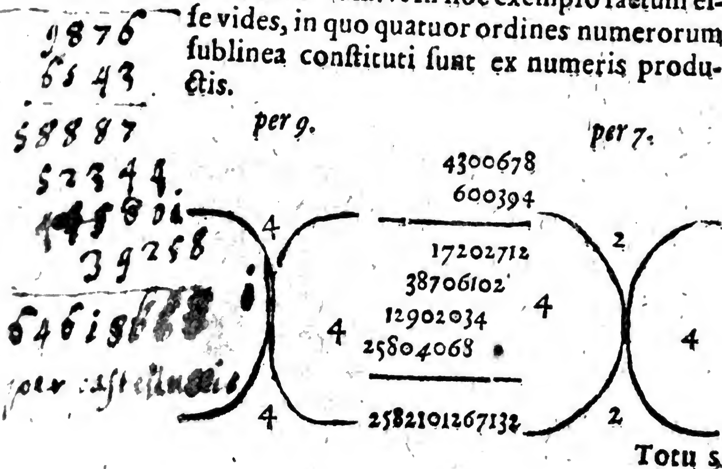
Quomodo numerus per vnam figuram multiplicetur.

Primum multiplico 8. per 4. dicendo, octies 4. faciunt 32. pono 2. ſub 4. & ſeruo 3. Item octies 9. faciunt 72. & additis 3. ſeruatis, fiunt 75. pono 5. ſub 9. & ſeruo 7. Item octies 3. faciunt 24. & additis 7. ſeruatis, fiunt 31. pono 1. ſub. 3. ſeruoque 3. Deinde octies o. facit o. & additis 3. ſeruatis, fiunt 3. quæ pono ſub o. nihilque reſeruo. Rurſus octies o. facit o. cui, quia nihil ſeruaui in præcedenti producto, nihil addendum eſt. Pono ergo o. ſub o. nihilque reſeruo. Denique octies 6. faciunt 48. quibus, quia in proximo producto nihil ſeruaui, nihil addo. Pono igitur totum hunc numerũ

ſub linea,quia multiplicatio ad finem perducta eſt,cum nulla alia figura ſuperioris numeri reſtet multiplicanda per 8. Itaque ſi totum numerum 600394. multiplicemus per 8. procreabimus hunc numerum 4803152. Atque hoc modo quemcunq; numerum per quamuis figuram multiplicabis.

Quomodo numerus per numerū pluribus figuris ſcriptū multiplicetur.

Si vero numerus per numerum pluriū figurarum ſit multiplicādus, ducatur ſub ipſis diſpoſitis, vt dictum eſt, linea recta. Deinde ſingulæ figuræ inferioris numeri per ſingulas figuras numeri ſuperioris multiplicentur, vt proxime docuimus; hoc ſolum diligenter obſeruato, vt numerus productus ex quacunq; figura inferioris numeri per primam figuram numeri ſuperioris multiplicata collocetur ſub illa figura inferioris numeri, per quā ſuperior numerus multiplicatur, reliqui autē numeri ex multiplicatione eiuſdem figuræ numeri producti ſtatuātur ſuo ordine deinceps verſus ſiniſtram. vt in hoc exemplo factum eſſe vides, in quo quatuor ordines numerorum ſub linea conſtituti ſunt ex numeris productis.



Totū s

Totus enim numerus productus ex multiplicatione 4. in omnes figuras superioris numeri habet primam suam figuram sub 4. Ita quoque numerus productus ex multiplicatione 9. in omnes figuras numeri superioris primam suam figuram habet sub 9. Eadem ratione prima figura numeri producti ex multiplicatione 3. in omnes figuras numeri superioris collocata est sub 3. Denique prima figura numeri producti ex multiplicatione 6. in omnes figuras superioris numeri posita est sub 6. Reliquæ autem figuræ ordine suo progrediuntur versus sinistram.

Quoniam verò cifra siue multiplicans siue multiplicata producit 0, omisimus in numero inferiori duas cifras, ita vt eas non multiplicauerimus in numerum superiorem, quia semper produxissent 0. Idem faciendum est, quotiescunque in numero inferiori fuerint aliquot cifræ. Eas enim semper omittemus, & ad proximè sequentem figuram significatiuam nos conferemus. Cifræ tamen superioris numeri, si quæ sint, negligendæ non sunt. Nam licèt multiplicatæ per figuras inferioris numeri significatiuas producant 0. sæpenumero tamen producto illi 0. addendum est aliquid, illud nimirum, quod in præcedenti multiplicatione aliquando reseruatum est, idque loco producti reponendum sub linea. Immo etiam si nihil reseruatum sit aliquando, ponenda tamen est figura 0. sub linea loco producti. Quæ omnia in superioribus exemplis obseruata sunt. In priori enim cum multiplicauimus 8. per 0. produxi-

mus o. sed quia in præcedenti multiplicatione reseruata erant 3. posuimus 3. loco producti o. Rursus cum multiplicauimus iterum S. per o produximus etiam o. & quoniam nihil reseruatum fuit, posuimus o. loco producti. Idemq; factum est in posteriori exemplo.

Post hæc infra omnes numeros productos alia linea ducatur, vt sub ea ponatur summa ex omnibus illis productis collecta. Quæ quidem summa colligenda est, vt in additione traditum est; dummodo prima figura cuiuslibet producti eum intelligatur locũ occupare, quem figura primi producti, sub qua illa collocatur, occupat: Hoc est, vt figura 2. quæ prima est secundi numeri producti in proposito exemplo, cogitetur esse posita sub secundo loco primi producti; figura autem 4. quæ prima est in tertio producto, intelligatur esse locata sub tertio loco primi producti; Deniq; figura 8. quæ prima etiam est in quarto producto, concipiatur occupare sextum locum sub primo producto. In his enim locis omnes has figuras vides esse positas. Itaq; vt exemplo rem monstremus, hac ratione summa colligetur. In numeris productis sola figura 2. occupat primum locum; Ea igitur sola ponenda est in primo loco sub linea. Deinde in secundo loco sunt 1. & 2. quæ faciunt 3. sub linea in secundo loco ponenda. Rursus in tertio loco sunt 7. o. 4. quæ efficiunt 11. Collocanda ergo erit 1. sub linea in tertio loco, & seruanda 1. vt figuris quarti loci adijciatur, &c. Hac ratione summa collecta erit 258210126713 2. atque hic numerus producitur ex mul-

ex multiplicatione 4300678. in 600394.

Vt autem videas eundem numerum gigni, etiam si maiorem numerum sub minore statuamus, apposuimus hoc alterum exemplum sequens, in quo ijdem duo numeri 4300678. & 600394. inter sese multiplicantur, sed maior numerus sub minore positus est, factique sunt quinque ordines numerorum productorum, quot nimirum sunt figuræ significatiuæ in numero inferiori. Idem tamen numerus productus est, qui prius.

per 9. *per 7.*

4 | 4 | 1 | 4 (per 9)

600394
4300678
―――――――
4803152
4202758
3602364
1801182
2401576
―――――――
2582101267132

2 | 4 | 4 | 2 (per 7)

Hic modus multiplicandi, quem hactenus exposuimus, apud omnes magis vsitatus est: alias tamen multiplicandi rationes non iniucundas in pleniore nostra Arithmetica explicabimus.

Examen multiplicationis triplex est. Primũ fit per abiectionẽ 9. hoc modo. Reijciantur primũ 9. ex primo numero multiplicato, quoties fieri potest, vt in additione diximus, residuumque in sinistra parte crucis ponatur. Deinde

Prima probatio multiplicationis per 9.

Deinde reiectis 9 eodem modo ex altero numero multiplicato, locetur residuum in dextra parte crucis. Post hæc, multiplicatis his duobus residuis inter se, & ex producto reiectis 9. statuatur residuum in superiori parte crucis. Postremo ex summa omnium productorum reiectis quoque 9 scribatur residuum in parte crucis inferiore. Necesse enim est, residuum hoc æquale esse residuo superiori, si erratum in multiplicatione non est. Exempla posita sunt in superioribus multiplicationibus. Nam in primo exemplo, reiectis 9 ex 600394. residuum est 4. Residuum autem huius numeri 8. est 8. quia 9. abijci non possunt. Multiplicatis autem his residuis 4. & 8. inter se, fiunt 32. à quibus si reijciantur 9. ex producto 4803152. In secundo autem exemplo, residuum primi numeri est 1. secundi autem 4. Multiplicatisque inter se his residuis 1. & 4. fiunt 4. in suprema parte crucis locanda, quia 9. abijci non possunt. Reiectis autem 9. ex tota summa, supersunt etiam 4.

Secunda probatio multiplicationis per 7.

Alterum examen fit per reiectionem 7. si nimirum ex ijsdem numeris abijciantur 7. vt in additione diximus, ex quibus in superiori examine præcepimus reijcienda esse 9. Exemplum habes in postremis duabus multiplicationibus. Sed duo hæc examina sunt etiam fallacia, propter causas supra adductas.

Tertia probatio multiplicationis per diuisionem.

Tertium examen certissimum est, fitq; per diuisionem. Si enim tota summa producta diuidatur per alterutrum numerorum multiplica-

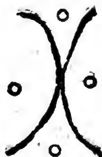
tiplicatorum, prodibit necessario in Quotiente alter numerus. Quæ quidem diuisio facillima erit, cum opus non sit, Quotientes figuras inquirere, cum eæ ordine omnes contineãtur in altero numero multiplicato. Sed hoc examẽ planius intelligetur, cum Diuisio explicata fuerit.

Alia duo exempla cum probatione per 9.

4058
23
12204
8136
93564



3069
45
15345
12276
138105



In priori horum exemplorum primum residuum est o. Vnde licet secundum residuum sit 5. tamen residuorum multiplicatio facit o. In posteriori autem vtrumque residuum numerorum multiplicatorum est o. Vnde eorum multiplicatio dabit etiam o. atque ita in vtroque exemplo residuum numeri producti etiam necessario erit o.

Facilitas multiplicationis, cum numeri in principio habent cifras.

Quod si vterque numerus multiplicandus, vel alter tantum, habuerit in principio aliquot cifras, multiplicatio admodum facilis erit. Abiectis enim omnibus cifris illis, multiplicandi erunt reliqui numeri inter se, & producto numero apponendæ ordine omnes illæ cifræ abiectæ. Vt si multiplicandus sit numerus 3406. per 4000. reiectis cifris 000. multi-

multiplicetur datus numerus per 4. & numero producto 13624. apponantur eædem cifræ, hoc modo. 13624000. Sic etiam, si multiplicanda sint 3040000. per 203000. reiectis 7. cifris ad dextram horum numerorum positis, multiplicentur reliqui numeri 304. & 203. inter se, & producto numero 61712. apponātur reiectæ illæ septem cifræ, hoc modo. 617 120000000.

Hinc fit, si numerus aliquis multiplicandus sit per 10. vel 100. vel 1000. vel 10000. &c. addendas esse illi numero ad dextrām tot cifras, quot continentur in numero multiplicante, sine vlla alia multiplicatione: quia reiectis cifris, superest sola vnitas, quæ numerū datum multiplicans eundem numerum producit. Vt 5067. multiplicata per 10. faciunt 50670. Multiplicata autem per 100000. faciunt 506700000. Ita quoque 3000. multiplicata per 100. faciunt 300000. &c.

DIVISIO INTEGRORVM numerorum. CAP. V.

Diuisio quid.

Diuisio est distributio propositi numeri in partes ab altero numero dato denominatas. Vt diuisio numeri 36. per 9. est distributio eius in nonas partes, nempe à 9. denominatas; quarū quidem singulæ quaternas vnitates continebunt: ita vt 4. sit numerus ex hac diuisione productus, qui Quotiens dici solet, propterea quod indicat, quoties numerus 9, qui diuidens, siue diuisor appellatur, in diuidendo numero 36. contineatur

Quotiens

tur. Indicat enim contineri quater, toties nimirum, quoties numerus Quotiens 4. vnitatem continet. Ex quo fit, Diuisionem ita quoque describi posse. Diuisio est inuentio numeri, qui toties vnitatem contineat, quoties numerus diuidendus diuisorem continet. Vt in proposito exemplo perspicuum est.

Quo pacto numeri in diuisione sint collocandi.

In diuisione scribitur diuisor sub numero diuidendo, non quidem ponendo primam figuram sub prima, & secundã sub secunda, &c. vt in additione, subtractione, & multiplicatione factum est, sed contrario ordine. Ponẽda enim hic est vltima figura diuisoris sub vltima figura diuidendi numeri, & penultima sub penultima, &c. Vt si diuidendus sit numerus 7809. per 47. collocandi erunt numeri, vt in apposito exemplo apparet.

7809
47

Quod si vltima figura diuisoris maior fuerit vltima figura numeri diuidendi, collocanda erit vltima figura diuisoris sub penultima figura numeri diuidẽdi, & penultima sub antepenultima, &c. vt in hoc exemplo est manifestũ. Idem faciendũ est, si vltima figura diuisoris ęqualis fuerit vltimæ figuræ numeri diuidendi, sed penultima maior, quã penultima: vel si & vltima vltimæ, & penultima penultimæ fuerit æqualis, sed antepenultima diuisoris maior, quàm antepenultima numeri diuidendi: Vel denique, quotiescunque diuisor maior fuerit eo numero, quem tot figuræ vltimæ numeri diuidendi exprimunt, quot

37800
47

figuris

figuris diuisor scribitur. Quæ omnia in his duob⁹ prioribus exēplis hic positis manifesta sunt. Quod si diuisor æqualis fuerit illi numero, quem tot figuræ numeri diuidendi exprimunt, quot figuris diuisor scribitur, collocandus erit diuisor sub eo numero, vt in posteriore tertio exemplo factum esse vides.

46800.	476047.	4793.
47	4762	47

Diuisio quomodo fiat.

Ita autem diuisio fiet. Primum quæratur, quoties diuisor in numero sibi suprascripto contineatur, & numerus indicans, quoties continetur, ad dexteram numeri diuidendi post lineam hanc curuam (scribatur; atq; hic numerus (qui semper vnica figura scribitur. nunquam enim maior numerus, quam 9. poni potest in Quotiente; etiamsi diuisor videatur sæpius aliquando contineri in numero suprascripto, quàm nouies, vt in exemplis patebit) in diuisorem multiplicetur, productusque numerus (qui seorsum scribendus non est, sed memoria retinendus.) ex suprascripto numero subtrahatur, vt in subtractione docuimus, scribendo singulos numeros residuos supra figuras, à quibus facta est subtractio, deletis prius hisce figuris vna cum diuisore.

In Quotiente nō potest poni maior numerus quá 9.

Residuus numerus semper debet esse minor diuisore.

Numerus autem totus residuus supra diuisorem notatus, minor esse debet diuisore, alias erratum esset. Id quod etiam in alijs residuis obseruandum erit.

Deinde promouendus erit diuisor dextrā versus in proximum locum, & iterum quærendum

rendum, quoties in numero sibi suprascripto contineatur, & reliqua facienda, vt prius. Quod si in aliqua promotione diuisor maior fuerit numero suprascripto, ita vt nec semel quidem in eo contineatur, scribenda erit figura 0. post illum numerum, quem post lineam curuam scribendum esse diximus, & diuisor delendus, iterumque promouendus ad proximum locum, & quęrendum, vt prius, quoties in numero suprascripto contineatur, &c. Atque ita semper promouendus erit diuisor, donec nullus locus in numero diuidendo supersit, in quem diuisor possit promoueri. Verum hæc exemplis fient planiora.

Sit primum diuidendus numerus 76048. per vnicam figuram, vt per 8. Primum inuenio diuisorem 8. contineri in numero suprascripto 76. nouies. Dicitur autem ille numerus supra diuisorem esse scriptus, qui exprimitur figura supra primam figuram diuisoris posita, & omnibus alijs versus sinistram, si quæ sint. Vt in dato exemplo numerus supra diuisorem positus est 76. Porro ex tabula Pythagorica, quæ supra posita est, cognosces facile, quoties figura diuisoris in supra posito numero contineatur. Si enim figurā diuisoris sumas in vertice tabulæ, & in eius linea, deorsum descendendo, accipias numerū suprapositum, vel, si is non inuenitur, eo proximè minorem, indicabit figura ei respondens in sinistro latere, quoties figura diuisoris in numero suprapositō contineatur. Vt in dato exemplo, sub figura 8. non reperitur numerus 76. suprapositus: si igitur accipiatur 72 pro

Quomodo numerus per vnicam figuram diuidatur.

Qui numerus dicatur supra diuisorē positus.

Quo pacto ex tabula Pythagorica cognoscatur, quoties figura diuisoris in suprapositō numero contineatur.

ximè minor, reperietur in sinistro latere figura 9. Nouies ergo continetur figura 8 in 76. atq; ita de cęteris. Pono igitur 9. post lineam curuam, & multiplico 9. per 8. dicendo, octies 9. faciunt 72. quæ subtrahenda sunt ex numero 76. supra diuisorem posito, hoc modo. Subtractis 2. ex 6. remanent 4. Deleta igitur figura 8. in diuisore, & figura 6. in numero diuidendo, pono 4. supra 6. Subtractis item 7. ex 7. nihil remanet. Deleta igitur figura 7. nihil pono supra 7. quia poni deberet cifra, quæ superuacanea esset, eò quòd illam nulla alia figura sequatur versus sinistram. Atque ita absoluta est vna operatio diuisionis, remanetque hic numerus 4048. vt in proposito exemplo vides.

```
 4
76048 (9
 8
```

Deinde promoto diuisore in præcedentē locum sub 0. vt hic vides in secundo exemplo, video diuisorem 8. in numero suprascripto 40. contineri quinquies. Pono igitur 5. post figuram 9. iam inuentam, vt in tertio exemplo vides, & dico; quinquies 8. (multiplicando nimirum figurā 5. inuentam per diuisorem) faciunt 40. quæ subtracta ex numero 40. supra diuisorem posito nihil relinquūt. Deleta igitur figura 8. in diuisore, & figuris 0. & 4. in numero diuidendo, absoluta erit secunda operatio diuisionis, remanebitque hic numerus 48. vt in eodem tertio exemplo apparet.

```
 4
76048 (9
 88
```

```
 4
76048 (95
 88
```

Rur-

Rurſus diuiſore promoto in præcedentem locũ ſub 4. vt hic in quarto exemplo cernis, reperio diuiſorẽ 8. nec ſemel quidẽ contineri in ſupraſcripto numero 4. Pono igitur o. poſt figuram 5. vltimo inuentam, vt in quinto exemplo factum eſt. Et quoniam figura o. multiplicata per diuiſorem nihil producit, nihil ſubtrahendũ erit ex numero 4. ſupra diuiſorem poſito. Deleto, igitur diuiſore, abſoluta erit tertia operatio diuiſionis, remanebitque numerus 48. vt in hoc eodem quinto exemplo manifeſtum eſt.

4
76048 (95
888

4
76048 (950
888

Poſtremo, promoto diuiſore in præcedentem locum ſub 8. vt hic in ſexto exemplo cernitur, inuenio diuiſorem 8. in numero 48. ſupraſcripto contineri ſexies. Pono igitur 6. poſt figuram o. vltimo repertam, vt hic in ſeptimo exemplo factũ eſt, & dico; ſexies 8. (multiplicando nimirum figuram 6. inuentam in diuiſorem) faciunt 48. quæ ſubtracta ex numero 48. ſupra diuiſorem poſito nihil relinquunt. Deleta igitur figura 8. in diuiſore, & figuris 8. & 4. in numero diuidendo, abſoluta erit tota diuiſio, cum nullus alius locus ſuperſit in numero diuidendo, in quem diuiſor poſſit promoueri; nihilque in diuiſione ſupererit. Itaque totus quotiens numerus eſt 9506.

4
76048 (950
8888

4
76048 (9506
8888

Posui tot exempla in hac diuisione, vt distinctius appareret, quidnã in qualibet operatione relinquatur, & quid deleatur: quamuis solum extremum sit instar omnium, ita vt in operatione necesse non sit alia exempla depingere, sed satis sit, si vltimum describatur.

Quotiens quot figuras habeat.

Vides igitur, Quotientem tot habere figuras, quoties diuisor sub numero diuidendo positus est. Id quod in omnibus alijs diuisionibus, etiam per plures figuras institutis, euenit. Semper enim tot figuras habebit Quotiens, quoties totus diuisor sub numero diuidendo ponitur.

Quomodo numerus per plures figuras diuidatur.

Sit deinde numerus 1832487. diuidendus per numerum 469. qui non vna, sed pluribus figuris scribitur. Hic vt sciatur, quoties diuisor in numero suprascripto contineatur, (est autem in hoc exéplo numerus 1832. supra diuisorem positus.) non est id de toto diuisore inquirendum, sed satis est, si inuestigetur, quoties vltima eius figura, qualis hic est 4. contineatur in numero suprapo-

42	
671	
1832487	(3
469	

sito, (Dico autẽ etiam hic illum numerũ supra vltimam figuram diuisoris, vel supra quãcunq; aliam, esse positũ, qui exprimitur figura supra eam scripta, & omnibus alijs versus sinistram, si quæ sint. Vt in dato exemplo, supra figuram 4. positus est numerus 18. supra 9. autem numerus 1832. qui hic est 18. hac tamen adhibita cautione, vt non semper in Quotiente ponatur figura tot vnitatum, quoties vltima

Qui numerus dicatur supra quancunque figuram diuisoris esse positus.

ma

ma diuisoris figura in numero supra eam posito continetur, sed diligenter curetur, vt ea figura ponatur, quæ in totum diuisorem multiplicata eo ordine, quem iam præscribemus, talem numerũ producat, qui & ex numero supra diuisorem posito subtrahi possit, & subtractus relinquat numerum (si quem relinquas) diuisore minorem. Itaque (vt ad exemplum propositum veniamus) quanuis vltima figura diuisoris, quæ est 4. contineatur in suprapposito numero 18. quater, tamen quia figura 4. multiplicata in totum diuisorem producit maiorem numerum, quàm 1832, qui supra diuisorem positus est, ita vt ex supproposito numero subtrahi non possit, non pono 4. in Quotiente, sed 3. Quod si hæc figura 3. multiplicata in totum diuisorem produceret maiorem etiam numerum, quam 1832. ponerem 2. loco 3. Et si figura 2. multiplicata in diuisorem adhuc maiorem numerum procrearet, ponerem 1. atque ita semper minuam figuram Quotientis vna vnitate, donec figuram inueniam, quæ in diuisorem multiplicata numerum gignat, qui ex suprascripto numero detrahi possit,

Quõ ducenda sit figura Quotientis inuẽta in diuisorem.

Sic autem multiplicanda erit figura Quotientis inuenta in totum diuisorem. Primum ducenda est in vltimam figuram diuisoris, & hoc productum ex numero supra vltimam figuram illam posito auferendum, deleta prius illa figura diuisoris, vna cum numero, ex quo facta est subtractio. Deinde multiplicanda est in figuram penultimam diuisoris, productumque ex numero supra posito de-

trahendum, vt prius. Atque hoc modo in omnes figuras diuisoris multiplicanda est, &c. vt in nostro exemplo. Ex 3. in 4. fiunt 12. quæ ita subtrahenda sunt ex 18. numero supraposito. Demptis 2. ex 8. remanent 6. Deleta ergo figura 4. in diuisore, & figura 8. in numero diuidendo, repono 6. supra 8. Dempto item 1. ex 1. nil remanet. Deleo igitur 1. Deinde ex 3. in 6. fiunt 18. quæ ex numero supraposito 63. sic subducenda sunt. Distantia 8. à 10. (Nam 8. ex 3. subtrahi nequeunt.) est 2. additis 3. fiunt 5. quæ pono supra 3. deleta prius figura 6. in diuisore, vnà cum figura 3. in numero diuidendo. Addo autem 1. propter distantiam à 10. cuius mentio facta est, ad 1. (nempe ad denam numeri 18. qui subtrahitur.) fiuntque 2. quæ ex 6. ablata relinquunt 4. quæ pono supra 6. deleta prius dicta figura 6. Tandem ex 3. in 9. fiant 27. quæ sic ex suprascripto numero 452. detrahuntur. Distantia 7. à 10. (quoniam 7. ex 2. detrahi non possunt) est 3. additis 2. fiunt 5. quæ pono supra 2. deleta prius figura 9. in diuisore, & figura 2. in numero diuidendo. Addo autem 1. ad 2. (nempe ad denas numeri 27. subtrahendi) propter dictam distantiam à 10. facioque 3. quæ ablata ex 5. (nimirum ex secunda figura numeri 452. à quo subtractio fit) relinquunt 2. Pono ergo 2. supra 5. deleta prius dicta figura 5. Atque ita deinceps pergendum esset, si plures figuræ in diuisore reperirentur. Absoluta ergo hac ratione erit diuisionis vna operatio, remanebitq; hic numerus 425487. vt in exemplo suprascripto vides.

Promoto

Promoto iam diuisore in præcedentem locũ, ita vt singulę figurę diuisoris locum vnũ mutent, vt hic vides, intelligo vltimã figuram diuisoris, nẽpe 4. in suprapósito numero 42. contineri nouies. Pono igitur 9. post figuram 3. in priori operatione inuentam, vt in sequenti exemplo patet, & dico. ex 9. in 4. fiunt 36. quæ ita subtraho ex numero 42. suprascripto.

42
685
1832487 (3
4669
46

Distãtia 6. à 10. (quoniã 6. ex 2. subduci nõ possunt) est 4. additis 2. fiunt 6. quæ pono supra 2. deleta prius figura 4. in diuisore, vna cum figura 2. in numero diuidendo. Addo autem 1. ad 3. (nimirum ad denas numeri 36. subtrahendi.) propter dictam distantiam à 10. facioque 4. quæ ex 4. ablata nihil relinquunt. Deleo ergo 4. rursus ex 9. in 6. fiunt 54. Detractis igitur 4. ex 5. remanet 1. Demptis quoq; 5. ex 6. remanet etiam 1. Quare deleta figura 6. in diuisore, vna cum figuris 5. & 6. in numero diuidendo, pono supra singulas figuram 1. Denique ex 9. in 9. fiunt 81. quæ ita subduco ex numero 114. suprapósito. Dempto 1. ex 4. remanent 3. Pono ergo 3. supra 4. deleta prius figura 9. in diuisore, & figura 4. in numero diuidendo. Distantia autem 8. à 10. (quia 8. ex 1. subduci nequeunt) est 2. si addatur 1. fiunt 3. quæ supra 1. colloco, de-

1
63
421
6583
1832487 (390
466699
4666
44

 co, de-

co, deleta prius figura 1. Et propter dictam distantiam à 10. subtraho 1. ab 1. nihilque remanet. Deleo ergo 1. absolutaque erit secunda diuisionis operatio. Numerus autem remanens erit 3387. vt in exemplo patet.

Rursus promoto diuisore in proximum locum, vt in proximo exemplo apparet, ita vt figura 9. locetur sub 8. at 6. sub 3. & 4. sub 5. video vltimam figuram diuisoris, puta 4. nec semel quidem in suprapoſito numero contineri, quare scribo 0. post figuram 9. proximè inuentam, deleoque diuisorem. Absoluta namque ita erit tertia operatio diuisoris, remanebitque idem numerus 3387. qui in antecedente operatione reliquus fuit.

Postremo promoto diuisore in primum locum, vt in eodem proximo exemplo manifestum est, reperio vltimam diuisoris figurã 4. in suprascripto numero 33. contineri septies tantum; quia si sumeretur octies, non posset à numero 3387. suprapoſito fieri subtractio numerorũ productorum ex 8. in totum diuisorem. Itaque pono in Quotiente figuram 7. post alias figuras inuentas, vt in hoc exemplo apparet & dico. Ex 7. in 4. fiunt 28. quæ hac ratione ex numero 33. suprapoſito demo. Distantia 8. à 10. (Nam 8. ex 3. non possunt subtrahi) est 2. si addantur 3. fiunt 5. Deleta

```
    1
   031
  42180
  088364
 1832487 (3907 104/469
 469999
   4666
    44
```

leta ergo figura 4. in diuisore, & figura 3. in numero diuidendo, pono 5. supra 3. Addo autem 1. ad 2. (nempe ad denas numeri 28. subtrahendi) propter dictam distantiam à 10. facioque 3 quæ ex 3. ablata nihil relinquunt. Quare deleta figura 3. rursus dico. Ex 7. in 6. fiunt 42. quæ ex 58. numero supraposito ita tollétur. Detractis 2. ex 8. relinquuntur 6. Deleta ergo figura 6. in diuisore, & figura 8. in numero diuidendo, pono 6. supra 8. Detractis item 4. ex 5. remanet 1. Deleta ergo figura 5. pono 1. supra eam, & tandem dico. Ex 7. in 9. fiunt 63. quæ ex 167. numero supraposito sunt deducenda hoc modo. Demptis 3. ex 7. supersunt 4. Deleta igitur figura 9. in diuisore, & figura 7. in numero diuidendo, statuo 4. supra 7. Detractis item 6. ex 6. remanet 0. Deleta ergo figura 6. pono 0. supra eam, Atque ita tota diuisio absoluta est, remanetque numerus hic 104. qui post Quotientem 3907. collocandus est supra diuisorem 469. interiecta linea inter ipsos, vt fiat numerus fractus, hoc est, partes 104. ex partibus 469. in quas totum aliquod concipitur esse diuisum. Eodem pacto in alijs diuisionibus ponitur residuum, si quod fuerit, supra diuisorem, linea inter ipsos interiecta, vt fiat fractus numerus.

Quid agẽdum sit cũ numero ex diuisione relicto.

Immo vero, quando minor numerus per maiorem proponitur diuidendus, ponendus erit numerus diuidendus supra diuisorem, interiecta dicta linea inter ipsos, vt fiat numerus fractus; Vt si diuidendi sint 48. aurei in 60. milites, fiet numerus fractus, quem hic vides esse appositum, $\frac{48}{60}$

Quando numerus minor per maiorem proponitur diuidendus, quid agendũ.

ita vt quilibet accipiat 48. partes ex 60. in quas vnus aureus intelligitur esse diuisus. Quid autẽ sit huiusmodi fractus numerus, & quo modo eius valor exploretur tam in monetis, quã in ponderibus, aut mensuris, prout numerus diuidendus significat monetam, aut pondera, mensurasve, dicemus in tractatione fractorũ numerorum.

Quomodo non nulli ducant figurã Quotiẽtis inuẽtã in diuisorem.

Sunt nonnulli, qui alio modo multiplicant figuram Quotientis inuentam in totum diuisorem. Nam primùm eam multiplicant in primam figuram diuisoris, productumque ex numero ei figura suprapositо auferunt: Deinde eandem ducunt in secundam figuram diuisoris, & ita deinceps in reliquas, donec ad vltimam peruenerint, productosque numeros ex suprascriptis numeris tollunt. Vt si diuidendus sit numerus 3387. per 469. (quemadmodũ in vltima operatione superioris exempli factum est.) postquam repererunt, vltimam figuram diuisoris, nimirum 4. contineri septies in supraposito numero 33. (Nam octies comprehendi non potest, vt paulo ante diximus.) ponentes in Quotiente figuram 7. non dicunt, ex 7. in 4. fiunt 28. vt nos fecimus, sed; Ex 7. in 9. fiunt 63. quæ ita ex supraposito numero 3387. subtrahunt. Ablatis 3. ex 7. relinquuntur 4. Deleta ergo figura 9. in diuisore, & figura 7. in numero diuidendo, ponunt 4. supra 7. Ablatis quoque 6. ex 8. remanent 2. ponenda supra 8. prius deleta. Deinde iterum dicunt. Ex 7. in 6. fiunt 42. quæ ita demunt ex supraposito numero

```
  10
 2Ø7 4
 3387 (7
 4Ø9
```

mero 332. Ablatis 2. ex 2. nihil relinquitur. Deleta igitur figura 6. in diuisore vnà cum figura 2. in numero diuidendo, ponunt 0. supra 2. Et quoniam 4. (nempe altera figura producti numeri 42.) auferri non possunt ex 3. sumunt distantiam 4. à 10. nempe 6. cui addunt 3. vt fiant 9. ponenda supra 3. prius deleta. Propter dictam autem distantiam à 10. auferunt 1. ex vltima figura 3. ponuntque reliqua 2. supra 3. deleta prius figura 3. Postremo dicunt. Ex 7. in 4. fiunt 28. Subductis ergo 8. ex 9. remanet 1. ponenda supra 9. si prius deleatur in diuisore figura 4. vnà cum figura 9. in numero diuidendo. Ablatis item 2. ex 2. nil remanet; absolutaque erit operatio. Hac porro ratione plerumque fit, vt non scribantur tot figuræ supra numerum diuidendum, quot in priori illo modo multiplicandi figuram Quotientis in diuisorem ponuntur, quando ea ducitur primum in vltimam figuram diuisoris, deinde in penultimam, &c. vt supra explicauimus. Id quod exemplis addisces. Verum prior ille modus apud Mathematicos, & mercatores magis est in vsu, faciliusq; in eo error corrigi potest, si quando nimis magna figura posita fuerit in Quotiente, vt mox docebimus.

Hoc exemplo, quod explanauimus, plane percepto, nulla erit difficultas in diuidendo quouis numero per numerũ quotcunque figurarũ. Totus.n. labor in eo positus esse videtur, vt cognoscatur, quoties vltima figura diuisoris in numero suprascripto sumi debeat, vt videlicet figura hęc Quotiẽtis in oẽs figuras diuiso- *In quo difficultas diuisionis cõsistat.*

uiso-

uiſoris multiplicata numerum procreet, qui qui ex ſuprapoſito numero ſubduci poſſit, numeruſque poſt hãc ſubtractionem relictus ſit diuiſore minor.

Quando in Quotiente ſumpta eſt figura nimis parua, vel magna quid agendum.

Quod ſi quando contingat, (id quod non raro ijs euenire ſolet, qui parum in hoc negotio ſunt exercitati.) figuram talem in Quotiente poni, vt ea in omnes figuras diuiſoris multiplicata, productiſque ex numero ſupra diuiſorem poſito ſubductis, numerus relictus maior ſit diuiſore, vel certe non omnes producti ſubtrahi poſſint; ſi id quidem accidat in principio diuiſionis, facile error corrigetur, ſi accipiatur in Quotiente figura maior, aut minor, prout res exiget; quia tunc notæ adhuc ſunt figuræ numeri diuidendi ſupra diuiſorem poſitæ, etiam ſi deletæ ſint, ita vt facile ab ijs numeri ex multiplicatione nouæ figuræ Quotientis in figuras diuiſoris producti iterũ poſſint ſubduci, præſertim ſi figuræ illæ numeri diuidendi deletæ ſcribantur ordine ſupra alias figuras deletas, & diuiſor etiam ſub diuiſore deleto reponatur, ne figuræ deletæ negotium nobis faceſſant. Si vero in media operatione, vel prope finem id contingat, non tam facile errorem quis corriget, cum vix dignoſcantur figuræ numeri diuidendi ſupra diuiſorem in illa operatione poſitæ ab alijs figuris; quippe quæ iam deletæ ſint, & cum alijs permixtæ, ac ſupra numerum diuidendum poſitæ. Quare ne tunc cogamur diuiſionem totam reiterare, (quod neceſſario faciendum eſſe omnes docent. Id quod permoleſtũ eſſet, præſertim ſi iam plures operationes diuiſio-

uiſio-

uiſionis forent abſolutæ.) excogitauimus huiuſmodi remedium.

Si figura Quotientis accepta ſit nimis parua, ita vt numerus relictus poſt ſubtractionẽ numerorum, qui ex multiplicatione illius figuræ in omnes figuras diuiſoris producuntur, maior ſit diuiſore, ſubtrahemus diuiſorem ex numero relicto toties, quoties poſſumus, donec numerus relinquatur minor diuiſore, & quoties is ſubtractus erit, tot vnitates illi figuræ Quotiẽtis addemus. Si vero figura Quotientis accepta ſit nimis magna, adeo vt poſt ſubtractionem aliquot numerorum, qui ex multiplicatione illius figuræ in aliquot figuras diuiſoris producuntur, in aliquem numerum productum incidamus, qui amplius ſubduci non poſſit, multiplicabimus figuram illam Quotientis in figuras diuiſoris deletas, quarum nimirum numeri producti ſubtracti iam ſunt, & productos numeros, additis prius figuris numeri relicti, ordine ſupra illas figuras diuiſoris ſcribemus, deletis prioribus figuris relictis: Hac enim ratione reſtituetur numerus, qui ſupra diuiſorem poſitus erat ante illam operationem. Quocirca eum iterum per diuiſorem (renouatum tamen, quoad figuras deletas, ne confuſionem pariant) partiemur, accipiendo aliam figuram in Quotiente, quæ vna vnitate minor ſit, quam prior accepta. Et ſi hæc figura etiam nimis magna ſit, reſtituemus eodem modo numerum ſupra diuiſorem collocatum, & accipiemus aliam figuram minorem Idque toties faciemus, donec figuram inueniamus, quę in omnes figuras

diui-

diuiſoris multiplicata numeros producat, qui & ſubtrahi poſſint, & numerum relinquāt diuiſore minorem. Sed hæc omnia hoc propoſito exemplo fient magis perſpicua.

Exemplū correctionis, quādo nimis parua figura in Quotiente accepta eſt.

Sit diuidendus numerus 1623149. per 2899. Collocato diuiſore ſub numero diuidendo, ponamus quēpiam parum exercitatū accepiſſe in Quotiente figuram 4. Vnde ſi dicamus. Ex 4. in 2. fiunt 8. quibus detractis (eo modo, quem in proximo exemplo explicauimus) ex 16. remanent 8. Deinde ex 4. in 8. fiunt 32. quibus ſubductis ex 82. remanent 50. Rurſus ex 4. in 9. fiunt 36. quibus ſublatis ex 503. remanent 467. Deniq; ex 4. in 9. fiunt 36. quibus ex 4671. ablatis, relinquuntur 4635. qui numerus maior eſt diuiſore. Nimis ergo parua eſt figura accepta 4. Quare deleto reſiduo hoc, vnà cum accepta figura 4. ponemus has figuras 16231. numeri diuidendi deletas ſupra alias figuras deletas, & diuiſorem deletum renouatum ſub diuiſore collocabimus, vt in proximo exemplo factum eſſe vides. Qua ratione reſtitutus erit totus numerus diuidendus 1623149. vnà cum diuiſore, ac ſi nondum inchoata eſſet diuiſio. Ponemus ergo figuram 5. vna vnitate maiorem, quàm 4. in Quotiente, vt in hoc altero exemplo vides, & dicemus. Ex 5. in 2. fiunt 10. quibus detractis ex 16. remanent 6. Deleta igitur figura 2. in diuiſore,

(First scratch figure: 4 / 863 / 8075 / 16231 9. (4 / 2899 — with cancelled figures)

(Second scratch figure: 6 / 423 / 8631 / 18078 / 1623149 (4 / 2899 / 2899 — with cancelled figures)

& fi-

& figura 1. in numero diuidendo, quæ decem significat respectu figuræ 6. dicemus rursum. Ex 5. in 8. fiũt 40. quibus subtractis ex 62. remanent 22. Item ex 5. in 9. fiunt 45. quibus ex 223. subductis, remanent 178. Denique ex 5. in 9. fiunt 45. quibus demptis ex 1781. relinquuntur 1736. qui numerus diuisore minor est. Recte ergo accepta est figura 5.

1
23
678
4236
8631
18678
1623149 (45
28999
2899
289

Exemplũ correctionis, quando nimis magna figura in Quotiente accepta est.

Sed vt exemplum etiam habeas, quando nimis magna figura accipitur, ponamus in Quotiente positam esse figurã 6. Hęc multiplicata in 2. facit 12. quibus ablatis ex 16. remanent 4. Deinde quia ex 6. in 8. fiunt 48. quæ ex 42. detrahi nequeunt, fit vt figura accepta 6. sit nimis magna. Quamobrem deleto residuo hoc 4. vna cũ accepta figura 6. scribemus figuras 1. & 6. numeri diuidendi deletas supra easdem, & figuram 2. in diuisore deletam infra eandem, ita vt totus numerus diuidẽdus ab initio propositus, vnà cum diuisore restituatur, ac si diuisio nondum esset inchoata, vt in hoc exemplo apposito factum esse vides. Ponemus ergo, vt in sequenti exemplo apparet, figuram 5. vna vnitate minorem, quàm 6. in Quo-

4
1623149 (6
2899

6
14
1623149 (6
2899
2

Quotiente, & dicemus. Ex 5. in 2. fiunt 10. quibus ablatis ex 16. relinquũtur 6. Deleta igitur figura 2. in diuisore, & figura 1. in numero diuidendo, quæ decem significat respectu figuræ 6. dicemus rursum. Ex 5. in 8. fiunt 40. quibus detractis ex 62. remanent 22. Item ex 5. in 9. fiunt 45. quibus demptis ex 223. remanent 178. Denique ex 5. in 9. fiunt 45. quibus subductis ex 1781. remanent 1736. Potuerunt ergo omnes numeri producti subduci, relictusque est numerus diuisore minor. Quare recte accepta est in Quotiente figura 5. Ex his facile intelliges, quid agẽdum sit, quãdo in principio diuisionis accepta est figura nimis parua, aut magna. Nunc attende, quo pacto error corrigatur, si in media operatione nimis magna aut parua figura in Quotiente accepta sit.

1
2
6 3
14786
1023149 (65
2899
2

Promoueatur ergo diuisor in superiori exemplo, in quo nimis parua figura sumpta fuit in principio diuisionis, vt ibidem cernis in tertia positione exempli. Fingamus autem, vltimam diuisoris figuram 2. in supra posito numero 17. contineri septies, atque adeo in Quotiente post

1
233
678
4236
8031
18078
1023149 (457
28999
2899
289

te post

te post figuram 5. inuentam scribi 7. Quo posito dicemus. Ex 7. in 2. fiunt 14. quibus detractis ex 17. remanent 3. quę supra 7. scribo, deleta prius figura 2. in diuisore, vnà cũ figuris 7. & 1. in numero diuidẽdo. Deinde rursus dicemus. Ex 7. in 8. fiunt 56. quæ ex 33. auferri nequeunt. Est ergo figura 7. accepta nimis magna. Vt igitur restituatur numerus 17. à quo facta est subtractio, si forte is inter tot figuras deletas nõ internosceretur, multiplicanda est figura 7. accepta in figuram 2. in diuisore deletam, & producto addenda figura 3. supra dictã figuram diuisoris posita. Vt quoniam ex 7. in 2. fiunt 14. si addantur 3. fiunt 17. Deleta igitur figura 3. scribem⁹ supra eam numerum 7. & supra figuram 1. deletam ponem⁹ 1. atq; ita restitutus erit numerus 17. à quo facta est subtractio, vt in hoc apposito exẽplo apparet. Posita autem figura 2. sub figura 2. in diuisore deleta, vt etiã diuisor restituatur, vt in eodem hoc exẽplo manifestum est, concipiamus vltimã figurã diuisoris 2. contineri in 17. non septies, sed sexies, atq; adeo, deleta figura 7. in Quotiẽte, poni figurã 6. vt in exẽplo hoc altero apparet. Quo posito, dicemus. Ex 6. in 2. fiunt 12. quibus detractis ex 17. remanẽt 5. Deleta ergo figura 2. in diuisore, vnà cũ figuris 7. & 1. in numero diuidendo, scribemus 5. supra 7. & dicemus. Ex 6

```
   1
   1 7
   23 3
   078
   4236
   8631
  18078
  10231 49 (457
   28809 9
   2800
    28 9
    2
```

in 2.

trahendum, vt prius. Atque hoc modo in omnes figuras diuisoris multiplicanda est, &c. vt in nostro exemplo. Ex 3. in 4. fiunt 12. quæ ita subtrahenda sunt ex 18. numero supraposito. Demptis 2. ex 8. remanent 6. Deleta ergo figura 4. in diuisore, & figura 8. in numero diuidendo, repono 6. supra 8. Dempto item 1. ex 1. nil remanet. Deleo igitur 1. Deinde ex 3. in 6. fiunt 18. quæ ex numero supraposito 63. sic subducenda sunt. Distantia 8. à 10. (Nam 8. ex 3. subtrahi nequeunt.) est 2. additis 3. fiunt 5. quæ pono supra 3. deleta prius figura 6. in diuisore, vnà cum figura 3. in numero diuidendo. Addo autem 1. propter distantiam à 10. cuius mentio facta est, ad 1. (nempe ad denam numeri 18. qui subtrahitur.) fiuntque 2. quæ ex 6. ablata relinquunt 4. quæ pono supra 6. deleta prius dicta figura 6. Tandem ex 3. in 9. fiant 27. quæ sic ex suprascripto numero 452. detrahuntur. Distantia 7. à 10. (quoniam 7. ex 2. detrahi non possunt) est 3. additis 2. fiunt 5. quæ pono supra 2. deleta prius figura 9. in diuisore, & figura 2. in numero diuidendo. Addo autem 1. ad 2. (nempe ad denas numeri 27. subtrahendi) propter dictam distantiam à 10. facioque 3. quæ ablata ex 5. (nimirum ex secunda figura numeri 452. à quo subtractio fit) relinquunt 2. Pono ergo 2. supra 5. deleta prius dicta figura 5. Atque ita deinceps pergendum esset, si plures figuræ in diuisore reperirentur. Absoluta ergo hac ratione erit diuisionis vna operatio, remanebitq; hic numerus 425487. vt in exemplo suprascripto vides.

Promoto

Promoto iam diuisore in præcedentem locũ, ita vt singulę figurę diuisoris locum vnũ mutent, vt hic vides, intelligo vltimã figuram diuisoris, nẽpe 4. in suprapositꝰ numero 42. contineri nouies. Pono igitur 9. post figuram 3. in priori operatione inuentam, vt in sequenti exemplo patet, & dico: ex 9. in 4. fiunt 36. quæ ita subtraho ex numero 42. suprascripto.

42
685
1832487 (3
4009
46

Distãtia 6. à 10. (quoniã 6. ex 2. subduci nõ possunt) est 4. additis 2. fiunt 6. quæ pono supra 2. deleta prius figura 4. in diuisore, vna cum figura 2. in numero diuidendo. Addo autem 1. ad 3. (nimirum ad denas numeri 36. subtrahendi.) propter dictam distantiam à 10. facióque 4. quæ ex 4. ablata nihil relinquunt. Deleo ergo 4. rursus ex 9. in 6. fiunt 54. Detractis igitur 4. ex 5. remanet 1. Demptis quoq; 5. ex 6. remanet etiam 1. Quare deleta figura 6. in diuisore, vna cum figuris 5. & 6. in numero diuidendo, pono supra singulas figuram 1. Denique ex 9. in 9. fiunt 81. quæ ita subduco ex numero 114. suprapositꝰ. Dempto 1. ex 4. remanent 3. Pono ergo 3. supra 4. deleta prius figura 9. in diuisore, & figura 4. in numero diuidendo. Distantia autem 8. à 10. (quia 8. ex 1. subduci nequeunt) est 2. si addatur 1. fiunt 3. quæ supra 1. collo-

1
63
421
6883
1832487 (390
400007
4006
44

co, deleta prius figura 1. Et propter dictam distantiam à 10. subtraho 1. ab 1. nihilque remanet. Deleo ergo 1. absolutaque erit secunda diuisionis operatio. Numerus autem remanens erit 3387. vt in exemplo patet.

Rursus promoto diuisore in proximum locum, vt in proximo exemplo apparet, ita vt figura 9. locetur sub 8. at 6. sub 3. & 4. sub 3. video vltimam figuram diuisoris, puta 4. nec semel quidem in suprapositio numero contineri, quare scribo 0. post figuram 9. proximè inuentam, deleoque diuisorem. Absoluta namque ita erit tertia operatio diuisoris, remanebitque idem numerus 3387. qui in antecedente operatione reliquus fuit.

Postremo promoto diuisore in primum locum, vt in eodem proximo exemplo manifestum est, reperio vltimam diuisoris figurã 4. in suprascripto numero 33. contineri septies tantum; quia si sumeretur octies, non posset à numero 3387. supraposito fieri subtractio numerorũ productorum ex 8. in totum diuisorem. Itaque pono in Quotiente figuram 7. post alias figuras inuentas, vt in hoc exemplo apparet

1
031
42180
088364
1832487 (3907. $\frac{104}{469}$
466999
4666
44

& dico. Ex 7. in 4. fiunt 28. quæ hac ratione ex numero 33. supraposito demo. Distantia 8. à 10. (Nam 8. ex 3. non possunt subtrahi) est 2. si addantur 3. fiunt 5. Deleta

leta ergo figura 4. in diuisore, & figura 3. in numero diuidendo, pono 5. supra 3. Addo autem 1. ad 2. (nempe ad denas numeri 28. subtrahendi) propter dictam distantiam à 10. facioque 3 quæ ex 3. ablata nihil relinquunt. Quare deleta figura 3. rursus dico. Ex 7. in 6. fiunt 42. quæ ex 58. numero supraposito ita tollētur. Detractis 2. ex 8. relinquuntur 6. Deleta ergo figura 6. in diuisore, & figura 8. in numero diuidendo, pono 6. supra 8. Detractis item 4. ex 5. remanet 1. Deleta ergo figura 5. pono 1. supra eam, & tandem dico. Ex 7. in 9. fiunt 63. quæ ex 167. numero supraposito sunt deducenda hoc modo. Demptis 3. ex 7. supersunt 4. Deleta igitur figura 9. in diuisore, & figura 7. in numero diuidendo, statuo 4. supra 7. Detractis item 6. ex 6. remanet 0. Deleta ergo figura 6. pono 0. supra eam, Atque ita tota diuisio absoluta est, remanetque numerus hic 104. qui post Quotientem 3907. collocandus est supra diuisorem 469. interiecta linea inter ipsos, vt fiat numerus fractus, hoc est, partes 104. ex partibus 469. in quas totum aliquod concipitur esse diuisum. Eodem pacto in alijs diuisionibus ponitur residuum, si quod fuerit, supra diuisorem, linea inter ipsos interiecta, vt fiat fractus numerus.

Quid agēdum sit cū numero ex diuisione relicto.

Immo vero, quando minor numerus per maiorem proponitur diuidendus, ponendus erit numerus diuidendus supra diuisorem, interiecta dicta linea inter ipsos, vt fiat numerus fractus; Vt si diuidendi sint 48. aurei in 60. milites, fiet numerus fractus, quem hic vides esse appositum, $\frac{48}{60}$

Quando numerus minor per maiorem proponitur diuidendus, quid agendū.

ita vt quilibet accipiat 48. partes ex 60. in quàs vnus aureus intelligitur esse diuisus. Quid autē sit huiusmodi fractus numerus, & quo modo eius valor exploretur tam in monetis, quã in ponderibus, aut mensuris, prout numerus diuidendus significat monetam, aut pondera, mensurasve, dicemus in tractatione fractorũ numerorum.

Quomodo non nulli ducant figurã Quotiẽtis inuẽtã in diuisorem.

Sunt nonnulli, qui alio modo multiplicant figuram Quotientis inuentam in totum diuisorem. Nam primùm eam multiplicant in primam figuram diuisoris, productumque ex numero ei figura supraposito auferunt: Deinde eandem ducunt in secundam figuram diuisoris, & ita deinceps in reliquas, donec ad vltimam peruenerint, productosque numeros ex suprascriptis numeris tollunt. Vt si diuidendus sit numerus 3387. per 469. (quemadmodũ in vltima operatione superioris exempli factum est.) postquam repererunt, vltimam figuram diuisoris, nimirum 4. contineri septies in supraposito numero 33. (Nam octies comprehendi non potest, vt paulo ante diximus.) ponentes in Quotiente figuram 7. non dicunt, ex 7. in 4. fiunt 28. vt nos fecimus, sed; Ex 7. in 9. fiunt 63. quæ ita ex supraposito numero 3387. subtrahunt. Ablatis 3. ex 7. relinquuntur 4. Deleta ergo figura 9. in diuisore, & figura 7. in numero diuidendo, ponunt 4. supra 7. Ablatis quoque 6. ex 8. remanent 2. ponenda supra 8. prius deleta. Deinde iterum dicunt. Ex 7. in 6. fiunt 42. quæ ita demunt ex supraposito numero

```
 10
2024
3387 (7
469
```

mero 332. Ablatis 2. ex 2. nihil relinquitur. Deleta igitur figura 6. in diuisore vnà cum figura 2. in numero diuidendo, ponunt 0. supra 2. Et quoniam 4. (nempe altera figura producti numeri 42.) auferri non possunt ex 3 sumunt distantiam 4. à 10. nempe 6. cui addunt 3. vt fiant 9. ponenda supra 3. prius deleta. Propter dictam autem distantiam à 10. auferunt 1. ex vltima figura 3. ponuntque reliqua 2. supra 3. deleta prius figura 3. Postremo dicunt. Ex 7. in 4. fiunt 28. Subductis ergo 8. ex 9. remanet 1. ponenda supra 9. si prius deleatur in diuisore figura 4. vnà cum figura 9. in numero diuidendo. Ablatis item 2. ex 2. nil remanet: absolutaque erit operatio. Hac porro ratione plerumque fit, vt non scribantur tot figuræ supra numerum diuidendum, quot in priori illo modo multiplicandi figuram Quotientis in diuisorem ponuntur, quando ea ducitur primum in vltimam figuram diuisoris, deinde in penultimam, &c. vt supra explicauimus. Id quod exemplis addisces. Verum prior ille modus apud Mathematicos, & mercatores magis est in vsu, faciliusq; in eo error corrigi potest, si quando nimis magna figura posita fuerit in Quotiente, vt mox docebimus.

Hoc exemplo, quod explanauimus, plane percepto, nulla erit difficultas in diuidendo quouis numero per numerũ quotcunque figurarũ. Totus .n. labor in eo positus esse videtur, vt cognoscatur, quoties vltima figura diuisoris in numero suprascripto sumi debeat, vt videlicet figura hęc Quotiẽtis in oẽs figuras diuiso- **In quo difficultas diuisionis cõsistat.**

uiſoris multiplicata numerum procreet, qui qui ex ſuprapoſito numero ſubduci poſſit, numeruſque poſt hãc ſubtractionem relictus ſit diuiſore minor.

Quando in Quotiente ſumpta eſt figura nimis parua, vel magna quid agendum.

Quod ſi quando contingat, (id quod non raro ijs euenire ſolet, qui parum in hoc negotio ſunt exercitati.) figuram talem in Quotiente poni, vt ea in omnes figuras diuiſoris multiplicata, productiſque ex numero ſupra diuiſorem poſito ſubductis, numerus relictus maior ſit diuiſore, vel certe non omnes producti ſubtrahi poſſint; ſi id quidem accidat in principio diuiſionis, facile error corrigetur, ſi accipiatur in Quotiente figura maior, aut minor, prout res exiget; quia tunc notæ adhuc ſunt figuræ numeri diuidendi ſupra diuiſorem poſitæ, etiam ſi deletæ ſint, ita vt facile ab ijs numeri ex multiplicatione nouæ figuræ Quotientis in figuras diuiſoris producti iterũ poſſint ſubduci, præſertim ſi figuræ illæ numeri diuidendi deletæ ſcribantur ordine ſupra alias figuras deletas, & diuiſor etiam ſub diuiſore deleto reponatur, ne figuræ deletæ negotium nobis faceſſant. Si vero in media operatione, vel prope finem id contingat, non tam facile errorem quis corriget, cum vix dignoſcantur figuræ numeri diuidendi ſupra diuiſorem in illa operatione poſitæ ab alijs figuris; quippe quæ iam deletæ ſint, & cum alijs permixtæ, ac ſupra numerum diuidendum poſitæ. Quare ne tunc cogamur diuiſionem totam reiterare, (quod neceſſario faciendum eſſe omnes docent. Id quod permoleſtũ eſſet, præſertim ſi iam plures operationes diuiſio-

uiſionis forent abſolutæ.) excogitauimus huiuſmodi remedium.

Si figura Quotientis accepta ſit nimis parua, ita vt numerus relictus poſt ſubtractionē numerorum, qui ex multiplicatione illius figuræ in omnes figuras diuiſoris producuntur, maior ſit diuiſore, ſubtrahemus diuiſorem ex numero relicto toties, quoties poſſumus, donec numerus relinquatur minor diuiſore, & quoties is ſubtractus erit, tot vnitates illi figuræ Quotiētis addemus. Si vero figura Quotientis accepta ſit nimis magna, adeo vt poſt ſubtractionem aliquot numerorum, qui ex multiplicatione illius figuræ in aliquot figuras diuiſoris producuntur, in aliquem numerum productum incidamus, qui amplius ſubduci non poſſit, multiplicabimus figuram illam Quotientis in figuras diuiſoris deletas, quarum nimirum numeri producti ſubtracti iam ſunt, & productos numeros, additis prius figuris numeri relicti, ordine ſupra illas figuras diuiſoris ſcribemus, deletis prioribus figuris relictis. Hac enim ratione reſtituetur numerus, qui ſupra diuiſorem poſitus erat ante illam operationem. Quocirca eum iterum per diuiſorem (renouatum tamen, quoad figuras deletas, ne confuſionem pariant) partiemur, accipiendo aliam figuram in Quotiente, quæ vna vnitate minor ſit, quam prior accepta. Et ſi hæc figura etiam nimis magna ſit, reſtituemus eodem modo numerum ſupra diuiſorem colloca um, & accipiemus aliam figuram minorem Idque toties faciemus, donec figuram inueniamus, quę in omnes figuras diui-

diuiſoris multiplicata numeros producat, qui & ſubtrahi poſſint, & numerum relinquāt diuiſore minorem. Sed hæc omnia hoc propoſito exemplo fient magis perſpicua.

Exemplũ correctio nis, quãdo nimis parua figura in Quotiente accepta eſt.

Sit diuidendus numerus 1623149. per 2899. Collocato diuiſore ſub numero diuidendo, ponamus quẽpiam parum exercitatũ accepiſſe in Quotiente figuram 4. Vnde ſi dicamus. Ex 4. in 2. fiunt 8. quibus detractis (eo modo, quem in proximo exemplo explicauimus) ex 16. remanent 8. Deinde ex 4. in 8. fiunt 32. quibus ſubductis ex 82. remanent 50. Rurſus ex 4. in 9. fiunt 36. quibus ſublatis ex 503. remanent 467. Deniq; ex 4. in 9. fiunt 36. quibus ex 4671. ablatis, relinquuntur 4635. qui numerus maior eſt diuiſore. Nimis ergo parua eſt figura accepta 4. Quare deleto reſiduo hoc, vnà cum accepta figura 4. ponemus has figuras 16231. numeri diuidendi deletas ſupra alias figuras deletas, & diuiſorem deletum renouatum ſub diuiſore collocabimus, vt in proximo exemplo factum eſſe vides. Qua ratione reſtitutus erit totus numerus diuidendus 1623149. vnà cum diuiſore, ac ſi nondum inchoata eſſet diuiſio. Ponemus ergo figuram 5. vna vnitate maiorem, quàm 4. in Quotiente, vt in hoc altero exemplo vides, & dicemus. Ex 5. in 2. fiunt 10. quibus detractis ex 16. remanent 6. Deleta igitur figura 2. in diuiſore, & fi-

```
   4
   8 63
   8 0 7 5
 1 6 2 3 1   9. (4
   2 8 9 9 4
```

```
   6
   4 2 3
   8 6 3 1
 1 8 0 7 8
 1 6 2 3 1 4 9 (4
   2 8 9 9
   2 8 9 9
```

& figura 1. in numero diuidendo, quæ decem significat respectu figuræ 6. dicemus rursum. Ex 5. in 8. fiũt 40. quibus subtractis ex 62. remanent 22. Item ex 5. in 9. fiunt 45. quibus ex 223. subductis, remanent 178. Denique ex 5. in 9. fiunt 45. quibus demptis ex 1781. relinquuntur 1736. qui numerus diuisore minor est. Recte ergo accepta est figura 5.

1
23
678
4236
8631
18678
1623149 (45
28999
28999
289

Sed vt exemplum etiam habeas, quando nimis magna figura accipitur, ponamus in Quotiente positam esse figurã 6. Hęc multiplicata in 2. facit 12. quibus ablatis ex 16. remanent 4. Deinde quia ex 6. in 8. fiunt 48. quæ ex 42. detrahi nequeunt, fit vt figura accepta 6. sit nimis magna. Quamobrem deleto residuo hoc 4. vna cũ accepta figura 6. scribemus figuras 1. & 6. numeri diuidendi deletas supra easdem, & figuram 2. in diuisore deletam infra eandem, ita vt totus numerus diuidẽdus ab initio propositus, vnà cum diuisore restituatur, ac si diuisio nondum esset inchoata, vt in hoc exemplo apposito factum esse vides. Ponemus ergo, vt in sequenti exemplo apparet, figuram 5. vna vnitate minorem, quàm 6. in Quo-

Exemplũ correctionis, quando nimis magna figura in Quotiente accepta est.

4
1623149 (6
2899

6
14
1623149 (6
2899
2

te post figuram 5. inuentam scribi 7. Quo posito dicemus. Ex 7. in 2. fiunt 14. quibus detractis ex 17. remanent 3. quę supra 7. scribo, deleta prius figura 2. in diuisore, vnà cũ figuris 7. & 1. in numero diuidẽdo. Deinde rursus dicemus. Ex 7. in 8. fiunt 56. quæ ex 33. auferri nequeunt. Est ergo figura 7. accepta nimis magna. Vt igitur restituatur numerus 17. à quo facta est subtractio, si forte is inter tot figuras deletas nõ internosceretur, multiplicanda est figura 7. accepta in figuram 2. in diuisore deletam, & producto addenda figura 3. supra dictã figuram diuisoris posita. Vt quoniam ex 7. in 2. fiunt 14. si addantur 3. fiunt 17. Deleta igitur figura 3. scribemus supra eam numerum 7. & supra figuram 1. deletam ponemus 1. atq; ita restitutus erit numerus 17. à quo facta est subtractio, vt in hoc apposito exẽplo apparet. Posita autem figura 2. sub figura 2. in diuisore deleta, vt

```
    1
    1 7
    2 3 3
    0 7 8
    4 2 3 6
    8 0 3 1
  1 8 0 7 8
  1 0 2 3 1 49   (457
    2 8 8 0 0 9
    2 8 0 0
      2 8 9
        2
```

etiã diuisor restituatur, vt in eodem hoc exẽplo manifestum est, concipiamus vltimã figurã diuisoris 2. contineri in 17. non septies, sed sexies, atq; adeo, deleta figura 7. in Quotiẽte, poni figurã 6. vt in exẽplo hoc altero apparet. Quo posito, dicemus. Ex 6. in 2. fiunt 12. quibus detractis ex 17. remanẽt 5. Deleta ergo figura 2. in diuisore, vnà cũ figuris 7. & 1. in numero diuidendo, scribemus 5. supra 7. & dicemus. Ex 6

in 8. fiunt 48. quibus demptis ex 53. relinquuntur 5. Deleta igitur figura 8. in diuisore, vnà cum figuris 3. & 5. in numero diuidēdo, scribemus 5. supra 3. & rursus dicemus. Ex 6. in 9. fiunt 54. quibus subductis ex 56. remanent 2. Deleta ergo figura 9. in diuisore vnà cū numero 56. in diuidendo numero, ponemus 2. supra 6. ac tandem dicemus. Ex 6. in 9. fiunt 54. quæ ex 24. subtrahi nequeunt. Nimis ergo magna etiam est figura 6. in Quotiente. Quare vt sciamus, qui nam numerus supra diuisorem collocatus fuerit, antequam hanc operationem inciperemus, multiplicabimus figuram dictā 6. in figuras diuisoris deletas, vt dictum est. Vt ex 6. in 9. fiunt 54. Additis 2. quæ supra figuram diuisoris 9. deletam posita sunt, fiunt 56. Deleta ergo figura 2. scribemus supra eam 6. & retinebimus 5. Deinde ex 6. in 8. fiunt 48. Additis 5. quæ seruauimus, fi-

```
     18
    178
    233
   6782
   4236
   8631
  18678
  16231 49(4576
   28669
   2866
    286
     2
```

```
    17
    183
    178
   2336
   6782
   4236
   8631
  18678
  16231 49 (4576
   28669
   2866
    286
    289
     2
```

unt 53. Scribemus ergo 3. ſupra 5. & retinebimus 5. Poſtremo ex 6. in 2. fiunt 17. Additis 5. quæ reſeruauimus, fiunt 12. quæ ſupra 15. collocabimus: atque ita reſtitutus erit numerus, qui ante hanc operationem ſupra diuiſorem poſitus erat. Reſtitutis autem tribus quoque figuris 2. 8. 9. in diuiſore deletis, atque deleta figura 6. in Quotiente, ponamus 5. loco illius, vt in hoc exemplo vides. Quoniam vero ex 5. in 2. fiunt 10. quibus ablatis ex 17. remanent 7. delebimus figuram 2. in diuiſore, vnà cum figura 1. in diuidendo numero, quæ decem ſignificat reſpectu figuræ 7. & dicemus. Ex 5. in 8. fiunt 40. quibus ſubductis ex 73. remanent 33. Deleta ergo figura diuiſoris 8. vnà cum figura 7. in numero diuidendo, ſcribemus 3. ſupra eam, rurſuſque dicemus

2
38
170
1836
1781
2336
0782
4236
8031
18078 9
1023149 (45765
280099
28099
280
280
228

Ex 5. in 9. fiunt 45. quibus demptis ex 336. remanent 291. Deleta igitur figura diuiſoris 9. vnà cum numero diuidendo 336. ponemus loco illius 291. & tandem dicemus. Ex 5. in 9. fiunt 45. quibus ſubtractis ex 2914. relinquun-

tur 2869. qui numerus diuisore minor est. Recte ergo accepta est figura 5.

Promoto tandem diuisore in proximum locum, nimirum in vltimum, vt in præcedenti exemplo vides, cogitemus vltimam diuisoris figuram 2. in suprascripto numero 28. contineri septies. Posita igitur figura 7. in Quotiente, vt in hoc altero exemplo apposito vides, dicemus. Ex 7. in 2. fiunt 14. quibus ablatis ex 28. remanent 14. Item ex 7. in 8. fiunt 56. quibus detractis ex 146. remanent 90. Item ex 7. in 9. fiunt 63. quibus subductis ex 909. relinquuntur 846. Item ex 7. in 9. fiunt 63. quibus demptis ex 8469. remanent 8406. qui numerus maior est diuisore; & proinde figura accepta 7. nimis parua est. Quare subtrahem⁹ diuisorem ex dicto residuo, quoties possumus, & tot vnitatibus maiorem figuram, quàm 7. scribemus in Quotiente, quoties diuisor detract⁹ fuerit. Ita autē diuisorē detrahemus in hoc sequenti exemplo, restituto prius diuisore. Ablatis 2. ex 8. remanent

8
10
24
354
1700
1836
1781
2336
6782
42360
86310
1807800
1623140 (457657
289999
28999
289
289
228

nent 6. Item demptis 8. ex 64. remanent 56. Itém ſubductis 9. ex 560. remanent 551. Tandem detractis 9. ex 5516. remanent 5507. qui numerus adhuc maior eſt diuiſore. Detractis igitur rurſus 2. ex 5. remanent 3. Demptis autem 8. ex 35. remanent 27. Item ſubductis 9. ex 270. remanent 261. Denique ſubtractis 9. ex 2617. relinquũtur 2608. qui numerus minor iam eſt diuiſore. Quia ergo bis detract⁹ eſt diuiſor, ſcribemus in quotiẽte, deleta prius figura 7. numerum 9. duabus videlicet vnitatibus maiorem, quàm 7. Itaque totus numerus Quotiens eſt 559. Coacti autẽ ſum⁹ rem tot exemplis exponere, vt clarius intelligeretur, quid in ſingulis operationibus relinquatur, quãuis ſolum hoc vltimũ inſtar ſit omnium. Et licet tot verbis remedium iſtud expoſuerimus, vſus tamen facile docebit, rem eſſe breuiorem ac faciliorem, quàm vt verb exprimi poſſit.

```
      2
      3
      8
      6 6
      87
     108
     246
     384
    1700
    18360
    17811
    23360
    67821
    423608
    863107
   1807866
   1623149 (4576579
    289999
    28999
     2899
     289
     228
      28
```

rit, cum opus non ſit totam diuiſionem ab initio repetere. Exemplum habes in diuiſione numeri 2596860019. per 38748. Vt autem ſcias, quānam figuram numeri diuidēdi poſt quodlibet reſiduum ſcribere debeas, recte feceris, ſi ſub vltima figura primæ operationis, vt in dato exemplo ſub 6. punctum poſueris, vt indicet in ſecunda operatione aſſumendam eſſe figuram poſt illud punctum. Sub hac figura aliud punctum eſt ſignandum, vt ſignificet in tertia operatione ſumēdam eſſe figuram poſt illud punctum, &c, veluti hic obſeruatum eſſe vides.

Operatio 1.

2 1
3 7 2 9
7 1 4 4 8
2 5 9 6 8 6 (6
3 8 7 4 8

Diuidendus 2596860019
. . . .

Diuiſor 38748

Operatio 2.

7
1 8 4
6 8 0 6 4
2 7 1 6 8 6 (7
3 8 7 4 8

Operatio 3.

7440 (0
38748

Operatio 4.

3 5 6 5
4 6 7 6 3
7 4 4 0 1 (1
3 8 7 4 8

Operatio 5.

```
   7
  1880
  84277 7
 3508330 (9
  38748
```

Totus Quotiens. 67019 $\frac{7807}{8748}$

Probatio per 9. totius exempli. 3)1/1(5

Positis ergo ordine omnibus Quotiẽtibus, habebitur totus Quotiẽs 67019. Habet hoc artificiũ commoditatẽ hanc, quod si probatio nõ succedat ex sentẽtia, nõ necesse sit totã diuisionẽ repetere, sed satis est, vt singulæ operationes, quæ paucæ sunt, examinentur, & illa in qua error fuerit deprehẽsus, repetatur. Atq; hoc artificiũ facile est, & expeditum, ideoq; à tyronibus adhibendum censeo.

Quomodo alij diuisionem absoluãt.

Nam quod alij multiplicent figuram in Quotiente positam in totum diuisorem, productumque numerum sub diuisore collocẽt, (prima figura posita sub prima, & secunda sub secunda, &c.) vt eum ex numero supra diuisorem posito detrahant, res est certa illa quidem, ac facilis, sed quæ longiorem efficiat diuisionem, quàm par est, eumque, qui diuidit, non parum remoretur. Vt enim numerum hunc verbi gratia, 40689, per 1298. diuidant, postquam in prima operatione posuerunt in Quotiente figurã 3. multiplicant eam in diuisorem, primum quidem in figuram 8. dicendo. Ex 3. in 8. fiunt 24. scribunt ergo 4. sub

```
  45
 1741
 40689 (31
 12988
 3894
 129
```

8. &

8, & seruant 2. Deinde ex 3. in 9. fiunt 27. Additis 2. quæ seruata sunt, fiunt 29. Positis ergo 9. sub 9. seruant 2, &c. Post hæc, deleto diuisore, auferunt 4. ex 8, collocantque residuum 4. supra 8, deletis prius figuris 4. & 8. &c. Promoto deinde diuisore, progrediuntur eodem modo. Quod tamen nos breuius absoluimus, cum numerum productum non scribamus sub diuisore. Habet tamen modus iste hanc commoditatem, quod ex ipsa operatione facile intelligatur, num figura accepta in Quotiente sit nimis magna, nec ne. Nam si productus numerus ex multiplicatione figuræ illius in diuisorem subtrahi possit ex numero supra diuisorem posito, numerumque relinquat diuisore minorem, figura illa rectè accepta est; sin minus, erratum esse, dubitandum non est. Cōmoditas in hoc modo diuidendi.

Fiet autē hic modus expeditior, si pro diuisore ponatur, productus numerus ex figura Quotientis in diuisorē, fiantq; partiales diuisiones, vt paulo ante diximus, vt hic in eodē exemplo patet. Alia ratio diuisionis facilis.

Operatio 1.	*Operatio 2.*	*Operatio 3.*
259686 (6	271980 (7	7440 (0
232488	271236	
27198	744	

Operatio 4.	*Operatio 5.*
74401 (1	356539 (9
38748	348732
35653	7807

Diuidendus	259860019
	.....
Diuisor	38748
Quotiens	67019

Verbi g. in prima operatione diuidendus est numerus hic 259686. Si igitur sub ipso scriberetur diuisor, caderet figura 8. sub 6. & figura 3. sub 5. Et quia 3. in 25. numero suprapposito continentur sexies, (nã figura 7. esset nimis magna) dicemus, ex 6. in 8. fiunt 48. ponemus 8. sub 6. seruando 4. Deinde ex 6. in 4. fiunt 24. additisque 4. quæ seruauimus, fiunt 28. Positis ergo 8. sub 8. seruentur 2. & sic deinceps, donec figura Quotientis in omnes figuras diuisoris ducta sit. Facta autẽ subtractione, fit residuum 27198. &c. In tertia operatione, quia numerus diuidendus 7440. minor est diuisore, posita est figura 0. in Quotiente. Quod si quando productus numerus maior sit diuidendo in aliqua partiali diuisione, Figura Quotientis accepta fuit nimis magna: ideoque repetenda erit illa diuisio partialis. Hoc modo si diuisio instituatur, nulla erit inter figuras deletas confusio, licet futura sit aliquanto longior illo modo, quem in principio tradidimus.

Alius modus absoluendi diuisionem.

Quod etiam alij diuisorem prius per singulas figuras significatiuas multiplicent, quemlibet productum numerum prope figuram multiplicantem scribendo, vt inter hos productos quærant numerum positum supra diuisorem, eoque inuento. vel certe, si non inuenitur, proxime minore accepto, figuram multiplicantem illi ascriptam in Quotiente

ponant,

ponant, atque numerum acceptum ex numero ſupra diuiſorem poſi[illegible]; res etiam facilis eſt, & commoda, præſertim tyronibus, & parum in hac arte exercitatis, ſed nimis longa, ac moleſta. Nam vt ver. g. diuidant hunc numerum 97086. per 37. collocant diuiſorem iuxta 1. Eundem deinde duplicatum iuxta 2. triplicatum vero iuxta 3. &c. Poſtea inter hos numeros inquirunt numerum 97 ſupra diuiſorem poſitum, quē quoniam non inueniunt, accipiunt 74. proximè minorem, & figuram 2. è regione eius collocatam ponunt in Quotiente, auferuntque 74. ex 97. ſcribentes reſiduum 23. ſupra 97. deletis prius figuris 7. & 9. vnà cum diuiſore. Promoto deinde diuiſore, quęrunt inter eoſdem numeros hunc numerum 230. poſitum ſupra diuiſorem: quo non inuento, accipiunt proxime minorē 222. collocātq; figuram 6. è regione eius poſitā in Quotiente, & denique numerum eundem 222. ex 230. ſubducunt. Atque hoc modo progredientes totam diuiſionem perficiunt. Sed quis non videt, diuiſionem hac ratione longius, quàm par eſt, produci, pręſertim, ſi diuiſor quatuor, aut quinque, vel etiam pluribus figuris ſcribatur? Item quando Quotiens habet duas tantum aut tres figuras, non video, cur fruſtra duiſor in omnes nouem figuras ducatur.

```
  23
 97086  (26
 377
  3
```

37	1
74	2
111	3
148	4
185	5
222	6
259	7
296	8
333	9

Maxi-

Diuisio per Dandam.

Maxim[illegible] mihi probatur modus ille diuidend[illegible] per Dandam) vocant. qui securissimus est: quia statim operatio corrigi potest, si forte in Quotiente posita est figura nimis magna, vel parua, & nunquam figuræ in numero diuidendo delentur. Modus autem est iste, aliquantulum ab eo, quo alij vtuntur diuersus, sed commodior meo iudicio, ac breuior. Sit v. g. diuidendus numerus 1904639. per 2978.

Posito numero cum linea curua scribatur diuisor supra locum, vbi quotiés reponi solet, vt multiplicationes reddantur faciliores.

Diuisor 2978		
1904639. (639 $\frac{1697}{2978}$		
...		
1178..	17898	
2849.	8934	*producti.*
1697	26802	

Deinde sub 6. vbi staret figura 8. diuisoris, si sub diuidendo numero collocaretur, vt in principio huius cap. diximus, ponatur punctum ad denotãdum, ibi inchoandam esse subtractionem. Igitur quoniam 2. vltima figura diuisoris continetur in 19. sexies (quia nouies, vel octies, vel septies, totus diuisor in numero 19046. contineri non potest) ponenda est figura 6. in Quotiente, quæ in diuisoré ducenda est, & simul subtractio facienda, hoc ordine. Ex 6. in 8. fiunt 48. quæ ex numero 19046. subtrahenda sunt; sed quia figura 8. maior est quàm 6. auferemus 8. ex 10. residuoq; 2. addemus 6. summamq; 8. sub 6. collocabimus, seruando 5. in mente (nimirũ 4. propter 40. & 1. propter 10. à quibus subtracta fuerũt 8.) Deinde ex 6. in 7. fiunt 42. & additis 5. seruatis

uatis, fiunt 47. subtractis ergo 7. ex 10. remanent 3. additisque 4. fiunt 7. quæ sub 4. collocentur, seruatis interim 5. propter 40. & 10. Item ex 6. in 9. fiunt 54. additisque 5. seruatis, fiunt 59. subtractis autem 9. ex 10. (quia ex 0. subtrahi nequeunt) remanet 1. additaque figura 0. fit 1. sub 0. scribenda, seruatis interim 6. propter 50. & 10. Postremo ex 6. in 2. fiunt 12. additisque 6. quæ seruauimus fiunt 18. quibus subtractis ex 19. remanet 1. sub 9. ponenda.

Hac absoluta operatione, apponantur duo puncta sub figura 3. vt indicent, inde incipiédã esse subtractionem. Et quia 2. continentur in 11. ter, ponenda est in Quotiente figura 3. (quia figura 5. aut 4. foret nimis magna) quæ iterum in totum diuisorem ducenda est eodem ordine, videlicet ex 3. in 8. fiunt 24. subtractis 4. ex 10. (quoniã ex 3. subtrahi nequeunt) remanent 6. additisq; 3. fiunt 9. scribenda sub 3. retentis mente 3. propter 20. & 10. Præterea ex 3. in 7. fiunt 21. additisque 3. quæ retinuimus, fiunt 24. Demptis autem 4. ex 8. supersunt 4. ponenda sub 8. retentis 2. propter 20. Rursus ex 3. in 9. fiunt 27. additisque 2. quæ retẽta sunt fiunt 29. Dẽptis 9. ex 10. quia ex 7. tolli non possunt, remanet 1. additisque 7. fiunt 8. sub 7. scribenda, reseruatis interim 3. propter 20. & 10. Deniq; ex 3. in 2. fiunt 6. quæ cum 3. seruatis fa-

Diuisor 2978

1904639 (639 $\frac{1697}{2978}$
.. .

1178 ..
0849.
1697

producti.
17868
8934
26802

tis, faciunt 9. quibus sublatis ex 11. remanent 2. reponenda sub 1.

His peractis, ponantur tria puncta sub 9. vt sciamus, inde inchoandam esse subtractionem. Et quia 2. continentur in 28. nouies, scribemus in Quotiente figuram 9. quæ in totum diuisorem ducetur hoc ordine. Ex 9. in 8. fiũt 72. subtractis ergo 2. ex 9 supersunt 7. scribenda sub 9. retentis interim 7. propter 70. Deinde ex 9. in 7. fiunt 63. quæ cum 7. seruatis efficiunt 70. subducta ergo figura o ex 9. remanent 9. scribenda sub 9. seruatis interim 7. propter 70. Amplius ex 9. in 9. fiunt 81. additisq́ue 7. seruatis, efficiuntur 88. Ablatis autem 8. ex 10. remanent 2. additisq́ue 4. fiunt 6. quæ sub 4. scribantur, retentis in mente 9. propter 80. & 10. Postremo ex 9. in 2. fiunt 18. quæ cum 9. retentis efficiunt 27. quibus ablatis ex 28. remanet 1. ponenda sub 8. Totus igitur Quotiens est 639. & vltimum residuum 1697. est illud, quod ex diuisione remanet, quemadmodum etiam in superioribus partialibus operationibus vltimum residuum 7807. est illud, quod in diuisione superest.

Itaque vt vides, tota difficultas huiusmodi in eo posita est, vt memoria retineantur deneę numerorũ productorũ ex figura Quotiẽtis in figuras diuisoris. Et sane modus hic pulcherrim⁹ est, quia distincte videtur residua operationum: ita vt, si forte in Quotiente accepta esset figura nimis magna, vel parua, facile figura illa, vna cum residuo falso deleri possit, assumiq; alia figura sine vlla confusione.

Quod

Quod si molestũ videatur, retinere illas denas numerorũ productorũ, scribi possũt producti seorsum, vt in exemplo vides sub Quotiente. Nam ex 6. in diuisorem fit numerus 17868. & ex 3. in eundem diuisorem, numer⁹ 8934. atque ex 9. in eundem diuisorem numerus 26802. Ita enim facilis erit subtractio, cũ præcedenti figuræ sit interdum addenda sola 1. quãdo nimirũ ex 10. facta est subtractio. Neque vero mihi placet, vt producti inter residua collocentur (quod nõnulli faciunt) quia confusio suborir etur inter numeros, cum tamen subtractiones non multo faciliores reddantur.

Restat, vt examen diuisionis tradamus, quod triplex est. Primum fit per abiectionem 9. hoc pacto. Reiectis 9. ex diuisore, quoties fieri potest, vt in additione docuimus, ponatur residuum in sinistra parte crucis. Reiectis item 9. ex Quotiente, quoties fieri potest, ponatur residuũ in dextra parte crucis. Multiplicatis deinde hisce duobus residuis inter se, & ex producto abiectis 9. quoties fieri potest, ponatur residuum hoc, si in diuisione nihil remansit, in superiore parte crucis. Si autem in diuisione residuum aliquod fuit, coniungendũ est vltimum illud residuum cum figuris huius residui diuisionis, & semper abijcienda 9. istudq; residuum in superiori parte crucis reponendum. Postremo reiectis 9. ex numero diuidendo, quoties fieri potest, ponatur residuum in parte inferiore crucis. Si enim residuum hoc æquale fuerit illi residuo in superiori parte crucis collocato, recte per- Prima probatio diuisionis per 9.

acta

acta est diuisio, sin minus, non recte.

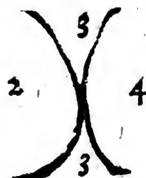
Itaque hæc diuisio ita examinabitur. Reiectis 9. ex diuisore 23. remanent 5. Abiectis item 9. ex Quotiente 176. remanent quoque 5. Multiplicatis autem hisce residuis 5. & 5. inter se, gignũtur 25. ex quibus si abijciatur 9. remanent 7. quæ (quoniã nihil ex diuisione relictum est) in superiore parte crucis collocanda sunt. Et quia reiectis 9. ex numero diuidendo 4048. relinquuntur etiam 7. recte peracta est diuisio.

1
131
273
4048 (175
2333
22



Hæc autem alia diuisio hac ratione examinabitur. Reiectis 9. ex diuisore 236. remanent 2. Reiectis itẽ 9. ex Quotiente 193. remanẽt 4. Multiplicatis autem hisce residuis 2. & 4. inter se, fiunt 8. ex quibus non possunt reijci 9. Hæc ergo 8. si nihil remansisset in diuisione, collocanda essent in superiori parte crucis: sed quoniam supersunt 130. dicemus 8. & 3. faciunt 11. Reiectis 9. remanent 2. Addito 1. fiunt 3. in superiori parte crucis collocanda. Et

1
2
183
434
22030
48678 (193
23666
233
2

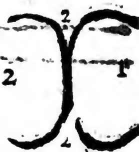


da. Et quoniam, reiectis 9. ex numero diuidēdo 45678. remanent quoq; 3. recte facta est diuisio.

Secundum examen fit per abiectionem 7. vt in additione docuimus, dummodo ex residuo diuisionis, si quod fuerit, eodem modo reijciantur 7. & residuum adijciatur ad illud residuum, quod in examine per abiectionem 9. addendum esse diximus residuo diuisionis, atque ex aggregato reijciantur 7.

Secunda probatio diuisionis per 7.

Vt prior proximarum duarum diuisionum ita examinabitur. Reiectis 7. ex diuisore 23. remanent 2. Item abiectis 7. ex Quotiēte 176. remanet 1. Multiplicatis autem hisce residuis 2. & 1. inter se, procreatur 2. in superiori parte crucis reponenda, quia nihil ex diuisiōe superfuit: Quia vero reiectis 7. ex diuidendo numero 4048. remanent etiā 2. recte facta est diuisio.



Posterior vero diuisio hoc modo examinabitur. Reiectis 7. ex diuisore 236. remanent 5. Item abiectis 7. ex Quotiente 193. supersunt 4. Multiplicatis autem duobus hisce residuis 5. & 4. inter se, & ex producto 20. reiectis 7. relinquuntur 6. quæ, si nihil remansisset in diuisione, collocanda essent in parte crucis superiore: sed quoniam reliquus fuit numerus 130. ex quo si abijciantur 7. supersunt 4. quæ addita ad vltimum residuum seruatum 6. faciunt 10. à quibus si reijciantur



ijciantur 7. remanet 3. in superiore parte crucis collocanda. Tantundem autem remanet, si ex diuidendo numero 45678. abijciantur 7. Rectè ergo diuisio facta est. Verum vtrumque hoc examen fallax esse potest, ob rationem dictam in superioribus.

Tertia probatio diuisionis per multiplicationē.

Tertium examen, quod certum est, & cui nulla fallacia subesse potest, fit per multiplicationem. Si namque diuisor, & quotiens inter se multiplicentur, & numero producto addatur residuum diuisionis, si quod fuerit, procreabitur numerus diuidendus, si erratũ in diuisione non est. Vt posterior duarũ proximarũ diuisionum ita examinabitur.

Multiplicato diuisore 236. per Quotientem 193. antequam producti numeri addantur inter se, scribatur sub ipsis numerus residuus diuisionis 130. prima nimirũ figura sub primo loco, & secunda sub secundo, &c. Si enim numeros productos, & hoc residuum in vnam summam colligamus, vt in Multiplicatione docuimus, producetur numerus 45678. qui diuisus fuit.

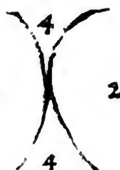
```
  236
  193
 ----
  708
 2124
 236
  130
 ----
45678.
```

Expedit interdũ, vt diuisio nondum absoluta examinetur.

Expedit interdum, cum, facta operatione aliqua in diuisione, dubitas, num in re aliqua peccaueris, necne, vt diuisionem vsque ad eũ locum perductam examines, ne frustra vlterius progrediaris, si forte iam error aliquis commissus sit. Examinabis autem partem illam diuisionis nō aliter, ac alias diuisiones, si omittas figuras numeri diuidendi, sub quibus nondum diuisor positus est. Vt in hac diuisione, facta prima operatione, eam ita examina-

aminabis per abiectionem 9. Reiectis 9. ex diuiſore 2898. remanet o. Item reiectis 9. ex Quotiẽte 2. remanent 2. Multiplicatis autem inter ſe hiſce reſiduis o.

1 91
2123
670056 (2
2898



& 2. producitur o. quæ cifra in ſuperiori parte crucis collocanda eſſet, niſi aliquid ex diuiſioneipereſſet: ſed quoniam ſuperſunt 913. reijcienda ſunt, 9. ex hoc reſiduo. Quo facto, remanebunt 4. in ſuprema crucis parte collocanda. Ac tantundem remanet, ſi reijciantur 9. ex numero 6709. hactenus diuiſo, omiſſis figuris 456. ſub quibus nondum poſitus eſt diuiſor.

Quod ſi diuiſor in principio habuerit aliquot cifras, facilis erit diuiſio, ſi à numero diuidendo remoueantur tot figuræ ad dexteram, quot cifras habet diuiſor, & reliquus numerus per diuiſorem, demptis prius illis cifris, diuidatur: Sed reſiduũ huius diuiſionis ſi quod erit, præponendũ eſt verſus ſiniſtrã figuris ablatis, vt fiat numerator fractionis; Denominator autẽ erit diuiſor tot⁹ vnà cũ cifris. Et ſi in diuiſione nihil remanſit, erunt figuræ ablatæ pro numeratore fractionis ponendæ. **Facilitas diuiſionis quando diuiſor habet in principio aliquot cifras.**

2
278
456
13040 (367 $\frac{7693}{18000000}$
3888
33

Vt si numerus 13946007693. diuidendus sit per 38000000. auferemus ex eo priores sex figuras 007693. ad dexteram, quot nimirum cifræ sunt in principio diuisoris; & reliquum numerum 13946. per 38. diuidemus, omissis illis sex cifris, vt in hoc apposito exemplo factum est. Quoniam vero in diuisione nihil relictum est, scribemus supra diuisorem numerum ablatum 7693. duæ enim illæ cifræ ad sinistram nihil significant, ac propterea omittendæ sunt.

Rursus si idem numerus 13946007693. diuidendus sit per 300800000. auferemus ex eo priores quinque figuras 07693. quot videlicet cifræ sunt in principio diuisoris; & reliquum numerum 139460. per 3008. partiemur, omissis quinque illis cifris, vt factũ est in hoc altero exemplo. Quia vero in diuisione reliquus est hic numerus 1092. si eum versus sinistram prẹponamus hisce figuris ablatis 07693. collocabimus supra diuisorem totum hunc numerum 109207693. vt hic cernis.

```
    09
   1 1 1 4 2
  1 3 9 4 6 0 (46  109207693
   3 0 0 8 8       300800000
     3 0 0
```

Hinc fit, si vltima figura diuisoris fuerit 1. & reliquæ omnes cifræ, Quotientem esse numerum diuidendum, sublatis prius ab eo to figuris versus dexteram, quot cifræ sunt in diuisore; Numerator autem fractionis erit numerus sublatus: & denominator ipse diuisor. vt si numerus 4780920345. diuidendus sit per

100000

100000. erit Quotiens $47809 \frac{20345}{100000}$ Sic etiam si numerus 9700203. diuidendus sit per 10000. Quotiens erit $970 \frac{203}{10000}$ atque ita de cæteris.]

Facilis aliquando fit diuisio quādo diuidēdus numerus habet aliquot cifras in principio

Neque vero hoc prætereundum est, si numerus diuidendus habuerit aliquot cifras in principio, & antequàm tota diuisio absoluatur, nulla figura significatiua in diuisione relicta fuerit, ponendas tunc esse post Quotientem omnes cifras numeri diuidendi nōdū deletas. Vt si diuidendus proponatur numerus 1863000000. per 345.

112
1338
1863000000 (5400000
3488
34

quoniam post secundam operationem nihil in diuisione remansit, si post inuentum Quotientem 54 ponantur quinque cifræ numeri diuidendi nondum deletæ, fiet totus Quotiēs 5400000. absolutaq; erit diuisio.

Additio, Subtractio, Multiplicatio & Diuisio fundamēta sunt omnium quæ in Arithmetica tradūtur.

Ex his quę de additione, subtractione, multiplicatione, diuisioneque numerorum integrorum dicta sunt, omnia, quæ in vniuersa Arithmetica traduntur, tanquam ex elementis pendent: adeo vt omnia per ea conficiantur, nihilque aliud in quæstionibus Arithmeticis soluendis pręcipiendum sit, quam vt numeri vel addantur, subtrahanturve, aut multiplicentur, diuidanturve. Itaque nisi quis in quatuor illis operationibus Arithmeticis probe sit exercitatus, frustra sese ad alia, quæ tradituri sumus, conferet.

NVMERATIO FRACTORVM NVMERORVM.

CAP. VI.

QVemadmodum in ſuperioribus numeros integros numerauimus, pluresque propoſitos in vnā ſummā collegimus, atq; vnū ab altero ſubduximus, duos itē quoſcunq; inter ſe multiplicauimus, & deniq; vnum per alterum ſumus partiti; ita in his, quę ſequūtur, eadē efficiemus in numeris fractis, qui alio nomine Minutiæ, fractionesve dici ſolent vulgares.

Numerus fractus. ſiue fractio Minutiave quid.

Eſt autem Fractio, Minutiave, ſiue numerus fractus, vna pars, vel plures partes alicuius totius in plures æquales partes diuiſi. Vt ſi totum aliquod ſectum ſit in quinque partes æquales, & quiſpiam ex illis ſumpſerit vnam, dicetur illa quinta pars numerus fractus. Sic etiam, ſi quis duas, tres, aut quatuor acceperit; dicentur duæ illæ, tres, vel quatuor quintæ partes numerus fractus.

Numerator & Denominator fractionis quid.

Conſtat quælibet Minutia duobus numeris, qui in ea proferenda exprimūtur. Primus diciturNumerator, quia numerat, quot partes cōtineat fractio propoſita ex illis, in quas totū, cuius eſt fractio, diuiſum eſt. Alter appellatur Denominator, quia denominat illas partes fractionis, hoc eſt, indicat, in quotnā partes totū intelligitur eſſe diuiſum. Vt cum proponiturfractio continēs tres quintas partes, Numerator eſt 3. quia ſignificat, in illa fractione cōtineri tres partes totius; Denominator vero eſt 5. quia indicat, tres illas partes nō eſſe qualeſcunq;, ſed quintas.

Scri-

Scribitur autem quælibet fractio hoc modo. Denominator directò sub Numeratore, interiecta lineola quadam inter vtrumq; numerum, collocatur. Vt tres quintæ partes hoc modo scribuntur, $\frac{3}{5}$. pronunciaturque vterque numerus in recto, primo tamen loco Numerator. Vt dicta Minutia ita proferẽda est; Tres quintæ. Hæc vero $\frac{25}{48}$. ita, Viginti quinque quadragesimæ octauæ, significatque, totum aliquod diuisum esse in quadragintaocto partes æquales, & vigintiquinque ex illis acceptas esse.

Fractio quæuis, quo pacto scribatur, & pronuntietur.

Oriuntur plerunque numeri fracti ex residuo diuisionis integrorum numerorũ. Quando enim aliquid in diuisione remansit, fit ex illo Numerator fractionis, cuius Denominator est diuisor, vt supra diximus. Vt cum diuiduntur 46. per 7. Quotiẽs est 6. supersuntq; 4. Fit ergo huiusmodi fractio. $\frac{4}{7}$. ita vt totus Quotiens sit $6\frac{4}{7}$. Item quando minor numerus per maiorem proponitur diuidendus, gignitur fractio, cuius numerator est numerus diuidendus, Denominator autem diuisor. Vt si diuidenda sint 4. per 7. fit fractio $\frac{4}{7}$. significatque 4. diuisa esse per 7. ita vt Minutia hæc $\frac{4}{7}$. sit septima pars huius numeri 4. Pars inquam, denominata à diuisore 7. Quemadmodũ enim diuisis 12. per 3. inuenitur numerus 4. qui tertia pars est numeri diuisi 12. Pars, inquã, à diuisore denominata; ita etiã cum diuidimus 4. per 7. fit Quotiẽs $\frac{4}{7}$. qui septima pars est numeri diuisi 4. Pars inquã, denominata à diuisore. Eadẽ ratione quælibet alia Minutia pars est numeratoris à denominatore denomi-

Fractiones vnde oriantur.

Quando minor numerus per maiorem diuiditur, fit fractio.

Fractio quæuis est pars Numeratoris à Denominatore denominata.

 nata

nata. Vt hæc Minutia $\frac{3}{4}$. est quarta pars ternarij. Nam si diuidantur 3. per 4. fit Quotiens $\frac{3}{4}$. Quare si sumatur Minutia $\frac{3}{4}$. quater, efficientur $\frac{12}{4}$. quæ ternario æquiualent, vt ex ijs, quæ paulo infra scribemus, manifestum erit, atque ita de alijs.

AESTIMATIO SIVE VALOR FRActorum numerorum. CAP. VII.

Minutiarũ valor quo pacto augeatur.

MInutiæ cuiusuis æstimatio, siue valor augetur, cum, Numeratore manente eodem, denominator minuitur: vel cum, Denominatore manente eodem, numerator augetur. Vt in his fractionibus $\frac{1}{6}.\frac{1}{5}.\frac{1}{4}.\frac{1}{3}.\frac{1}{2}$. vel in his $\frac{1}{7}.\frac{2}{7}.\frac{3}{7}.\frac{4}{7}.\frac{5}{7}.\frac{6}{7}$. quęlibet posterior priore maior est, vt ex sequẽtib⁹ patebit: & in prioribus quidem, manente semper eodem numeratore, denominator minuitur: in posterioribus vero, eodem semper manente denominatore, numerator augetur.

Minutiarũ valor quo pacto minuatur.

Minutiæ vero cuiusuis æstimatio, siue valor minuitur, cum, Numeratore manente eodem, denominator augetur: vel cum, Denominatore manente eodem, Numerator minuitur. Vt in his fractionibus. $\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{4}.\frac{1}{5}.\frac{1}{6}$. vel in his, $\frac{7}{8}.\frac{6}{8}.\frac{5}{8}.\frac{4}{8}.\frac{3}{8}$. quælibet posterior priore minor est, vt constabit ex sequentibus: & in prioribus quidem, eodem semper numeratore manente, denominator augetur; in posterioribus vero, eodem semper manente denominatore, numerator minuitur.

Minutiæ deinde quæcunque, quarum vnius

vnius numerator ad suum denominatorem eandem habet proportionem, quam reliquarũ numeratores habent ad suos denominatores, singuli ad singulos, inter se equales sũt. Vt hæ minutiæ $\frac{1}{2}$. $\frac{8}{16}$. $\frac{50}{100}$. $\frac{100}{200}$. $\frac{500}{1000}$. omnes inter se æquales sunt; quia cuiuuis numerator ad suũ denominatorem proportionem habet subduplam, id est, dimidia pars est ipsius. Sic etiam $\frac{3}{4}$. $\frac{6}{8}$. $\frac{36}{48}$. $\frac{90}{120}$. Nam cuiuslibet numerator ad suum denominatorem habet proportionem subsesquitertiam, hoc est, tres quartas partes ipsius continet.

Minutiæ, quarũ numeratores ad denominatores eandẽ habent proportionem, æquales sunt.

Quoniam vero, si duo numeri per eundem numerum multiplicentur, siue diuidantur, numeri producti eandẽ habent proportionẽ, quã duo illi numeri multiplicati, siue diuisi; fit, vt multiplicatis, aut diuisis Numeratore, & Denominatore per quemcunq; numerum, procreetur alia minutia eiusdem valoris, quãuis maiores, minoresue numeros habeat. Vt proposita hac minutia $\frac{5}{9}$. si vterque eius numerus multiplicetur per 3. producetur minutia $\frac{15}{27}$. eiusdem valoris. Sic etiam, si vterque numerus per 3. diuidatur, fiet minutia $\frac{2}{3}$. eiusdem valoris. Et licet hæc omnia demonstrari possint ex lib. 7. Eucl. contenti tamen erimus, si vno exemplo ex his duabus minutijs $\frac{2}{3}$. $\frac{6}{9}$. desumpto, in quo veritas huius rei perspicue apparebit, rem illustremus. Nam si accipiatur numerus 9. qui quidem habet partes à denominatoribus dictarum minutiarum denominatas, nimirum tertiam, ac nonam, erunt duæ eius tertiæ partes æquales sex nonis partibus eiusdem. Cum enim tertia eius pars sit 3. erunt

Si numerator, ac denominator cuiusuis fractiõis per quemcũq; numerũ multiplicetur, diuidaturve gignitur eiusdẽ valoris fractio.

duæ tertiæ partes 6. Item cum nona eius pars sit 1. erunt quoque sex nonæ partes 6. Aequales igitur sunt hæ minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{6}{9}$. & sic de alijs.

Quæ minutia vni integro æquiualeat.

Quando porro numerator alicuius minutiæ denominatori est æqualis, æquiualet minutia illa vni integro. Vt quælibet harum minutiarum $\frac{2}{2}$. $\frac{6}{6}$. $\frac{20}{20}$. $\frac{1000}{1000}$. constituit vnum integrum, hoc est, totum illud, quod in partes à denominatorib⁹ denominatas diuisum est: propterea quòd in numeratore continentur omnes partes, in quas integrum, seu totum est diuisum.

Quę minutia minor sit vno integro.

Quando vero numerator minutiæ minor est denominatore, minor est illa minutia vno integro, quales sunt hæ minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{7}$. $\frac{9}{10}$. quia cuilibet tot partes à suo denominatore denominatæ desunt ad integrum cõstituendũ, quot vnitatibus numerator à denominatore abest. Vt huic minutiæ $\frac{2}{3}$. deest $\frac{1}{3}$. huic vero $\frac{4}{7}$. desunt $\frac{3}{7}$. & huic $\frac{9}{10}$. deest $\frac{1}{10}$.

Quæ minutia maior sit vno integro.

Quando denique numerator minutiæ denominatore maior est, maior est illa minutia vno integro. quales sunt hæ minutiæ $\frac{4}{3}$. $\frac{24}{7}$. $\frac{10}{4}$. quia in cuiuslibet numeratore plures partes cõtinentur, quàm sint illę, in quas totum, siue integrum diuisum est.

Vtra duarũ minutiarũ maior sit, quo pacto cognoscatur.

Iam vero propositis duabus minutijs, vt cognoscas, vtra illarum maior sit, seruabis hanc regulam. Positis minutijs ordine, multiplica earum numeros in crucem, numeratorem prioris in posterioris denominatorem, & posterioris numeratorem in denominatorem prioris, ponendo numeros productos supra numeratores. Nam cuius numerator

merator maiorem numerum produxerit, ea minutia maior erit. Quòd si duo numeri producti fuerint æquales, æquales quoque erunt propositæ minutiæ. Vt in primo horum trium

16. 18.	41. 40.	48. 48.
$\frac{2}{3} \times \frac{6}{8}$	$\frac{1}{2} \times \frac{20}{41}$	$\frac{3}{4} \times \frac{12}{16}$

exemplorum maior est posterior minutia $\frac{6}{8}$. quàm prior $\frac{2}{3}$. quoniam numerus 18. productus ex 6. numeratore posterioris minutiæ in 3. denominatorem prioris maior est, quàm numerus 16. ex 2. numeratore prioris minutiæ in 8. denominatorem posterioris productus. In secundo vero exemplo maior est minutia $\frac{1}{2}$. quã $\frac{20}{41}$. In tertio denique æquales sunt minutiæ $\frac{3}{4}$. & $\frac{12}{16}$. vt ex multiplicationibus in crucem factis patet. Ratio huius regulæ est, quòd, cum muneratores in crucem per denominatores multiplicati producunt æquales numeros, eadem proportio sit numeratorum ad denominatores, vt constat ex propos. 19. lib. 7. Eucl. Quare vt supra diximus, æquales erunt minutiæ. Hinc fit, numeratorem illum, qui maiorẽ gignit numerum, ad suum denominatorẽ habere maiorem proportionem, ac proinde illam minutiam esse maiorem, vt supra dictum est. Sed vt exemplo etiam discas, maiorem esse minutiam $\frac{6}{8}$. quàm $\frac{2}{3}$. sumamus numerum 48. qui habet partes à denominatoribus harũ minutiarum denominatas, nẽpe octauam, & tertiam. Itaq; cum vna octaua pars huius numeri 48. sit 6. erunt sex octauæ, 36. Item cum vna tertia pars eiusdem numeri sit 16. erunt duæ tertiæ, 32. qui numerus minor est, quàm 36.

Quod

Valor minutiæ datæ quo pacto in minore moneta, pōdere vel mensura exploretur.

Quod si data sit minutia cuiuspiam monetæ, vel ponderis, aut mensuræ maioris, cupiasque valorem eius explorare in minori moneta, vel pondere, aut mensura, hoc est, reuocare eam ad minorem monetam &c. facies id in hunc modum. Multiplica numeratorem per numerum, qui indicat, quoties moneta minor, ad quam reuocanda est fractio, in maiori continetur, productumq; numerum per denominatorem diuide. Quotiens enim numerus valorem datæ minutiæ in minore illa moneta indicabit. Quod etiam de ponderibus, & mensuris intellige. Vt si data sit hæc minutia aureorum $\frac{4}{7}$. quæ significat, vt supra cap. 6. diximus, quatuor aureos in septem æquales partes distributos, redigendaque sit ad Iulios, Baiochos, & Quatrinos, (vtemur enim in hac nostra Arithmetica exemplis monetæ Romanę, in qua quatuor quatrini, cum Arithmeticam hanc primum conscripsimus, efficiebant vnum baiochum, & 10. baiochi vnum Iulium, ac 10. Iulij vnum aureum nummum.) multiplicabimus numeratorē 4. per 10. quoniam 10. Iulij vnum aureum conficiunt, vt 4. illos aureos in 7. partes diuisos redigamus ad 40. Iulios; numerumque productum 40. per denominatorem 7. partiemur. Quotiens enim numerus dabit Iulios $5\frac{5}{7}$. Quod si hanc minutiam Iuliorum, $\frac{5}{7}$. quæ significat 5. Iulios in 7. partes æquales diuisos, ad baiochos velimus redigere, multiplicabimus quoque numeratorem 5. per 10. quia 10. baiochi vnum etiam Iulium conficiunt, vt 5. illos Iulios in 7. partes æquales distributos redigamus ad 50. baiochos:

Iulius, Baioch', & Quatrinus apud Romanos quid significet.

chos: productumque numerum 50. per denominatorem eundem 7. diuidemus. Dabit enim Quotiens numerus baiochos 7 $\frac{1}{7}$. Si tandem minutiam hanc baiochorum, $\frac{1}{7}$. quæ significat vnum baiochum diuisum in 7. partes æquales, ad quatrinos velimus reducere, multiplicabimus numeratorem 1. per 4. quòd 4. quatrini efficiant vnum baiochum, vt illum baiochum in 7. partes æquales diuisum ad 4. quatrinos reducamus, numerumque productum 4. per denominatorem 7. partiemur, efficiemusque $\frac{4}{7}$. vnius quatrini, hoc est, paulo plus, quàm dimidium vnius quatrini. Itaque $\frac{4}{7}$. vnius aurei continent Iulios 5. Baiochos 7. & Quatrinos $\frac{4}{7}$. Si vero $\frac{4}{7}$. vnius aurei redigere statim velimus ad baiochos, multiplicabimus numeratorem 4. per 100. quoniam 100. baiochi vnum aureum constituunt, vt 4. illos aureos in 7. partes distributos redigamus ad 400. baiochos, numerumque productum 400. per denominatorem 7. patiemur, efficiemusque baiochos 57 $\frac{1}{7}$.

Rursus si explorandum sit, quot passus, pedes, palmos, digitosve contineant $\frac{5}{8}$. vnius milliarij Italici, statuendo milliarium vnum constare 1000. passibus Geometricis, passum vero 5. pedibus, & pedem 4. palmis, palmum autem 4. digitis, & digitum 4. granis hordei; multiplicabimus numeratorem 5. per 1000. vt 5. milliaria in 8. partes æquales distributa redigantur ad passus 5000. productumq; numerum 5000. partiemur per denominatorem 8. efficiemusq; 625. passus.

Sic etiam si $\frac{10}{12}$. vnius passus reducere velimus

mus ad pedes, multiplicabimus numeratorē 10. per 5. productumq; numerum 50. per denominatorem 13. partiemur, efficiemusque pedes $3\frac{11}{13}$. Si rursus hunc numeratorem 11. per 4. multiplicemus, numerumq; productū 44. per denominatorem 13. diuidamus, efficiemus palmos $3\frac{5}{13}$. Item si hunc numeratorem 5. per 4. multiplicemus, productumq; numerum 20. per denominatorē 13. partiamur, inueniemus digitos $1\frac{7}{13}$. Tandem si numeratorem hunc 7. multiplicemus per 4. & numerum productū 28. diuidamus per denominatorem 13. reperiemus grana hordei $2\frac{2}{13}$. Itaque $\frac{10}{13}$. vnius passus continent pedes 3. palmos 3. digitum 1. & grana $2\frac{2}{13}$.

Item reducenda sit minutia hæc, $\frac{3}{4}$. vnius libræ ad vncias. Quoniam 12. vnciæ vnam librā constituunt, multiplicabimus numeratorem 3. per 12. & productum numerum 36. per denominatorem 4. diuidemus, efficiemusque 9. vncias.

Postremo inquirendum sit, quot Minuta contineantur in $\frac{5}{6}$. vnius Gradus. Quia 60. Minuta efficiūt 1. Gradum, multiplicabimus numeratorem 5. per 60. & productum numerum 300. per denominatorem 6. diuidimus, efficiemusque Minut[illegible]

FRACTIONES FRACTORVM numerorum.

CAPVT VIII.

Minutiæ minutiarum vnde oriãtur.

NON solum res integra in quotuis partes æquales diuiditur, vt fractiões simplices,

plices, de quibus hic agimus, procreentur, verum etiam interdum ipſi fracti numeri intelliguntur in plures æquales partes diſtribui, ac ſi eſſent integræ quædam res. Vnde fractiones fractionum, fractorumve numerorũ, ſiue Minutiæ minutiarum oriuntur. Vt quemadmodum cum accipio quatuor partes alicuius totius in ſeptem partes diſtributi, efficio hanc minutiam ſimplicem $\frac{4}{7}$. quæ ſignificat quatuor ſeptimas partes ipſius integri: ita etiam cum intelligo hanc fractionem ſimplicem $\frac{4}{7}$. diuiſam eſſe in quinque partes æquales, accipioque tres partes, facio minutiam minutiæ illius, nempe tres quintas partes quatuor ſeptimarum alicuius integri; ita vt prior in recto efferatur, ſcribaturque, ſicut minutiæ ſimplices, poſterior vero pronuncietur in obliquo, noteturque ſine interiectione lineæ, vt ab alijs diſtinguatur. Vt prædicta minutia minutiæ ita ſcribenda eſt $\frac{3}{5}$. $\frac{4}{7}$. pronunciaturque ſic. Tres quintæ quatuor ſeptimarum vnius integri. Hæc autem minutia minutiarum $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{1}{6}$. $\frac{1}{2}$. ita proferetur. Duæ tertiæ trium quartarum ex vna ſexta parte vnius dimidij alicuius integri: ſignificat autem ex dimidio alicuius integri ſumptam eſſe vnam ſextam partem illius dimidij in ſex æquales partes diſtributi; & ex hac ſexta parte in quatuor partes æquales diuiſa acceptas eſſe tres quartas; ac demum ex his tribus quartis diuiſis in tres æquales partes ſumptas eſſe duas tertias. Eademque ratio eſt in alijs.

Minutia Minutiæ quid,

Minutiæ minutiarũ quomodo pronũciẽtur, & ſcribũtur.

Quo pacto autem æſtimatio, ſiue valor fractionum fractorũ numerorum cognoſcatur,

tur. docebimus ad finem cap. 10. vbi eas ad simplices fractiones reuocabimus.

REDVCTIO FRACTORVM NVMERORUM AD MINIMOS NUMEROS, *siue terminos.*

CAPVT IX.

Accidit nonnunquam, vt minutia aliqua ita magnis numeris scribatur, vt commode minoribus possit exprimi, non mutato eius valore, ac pretio. Vt hæc minutia $\frac{36}{72}$. æquiualet huic $\frac{1}{2}$. minimis, vt vides, numeris expressæ. Operæ pretium est autem minutiam maioribus numeris scriptam ad minimos numeros, terminosve reuocare, multas ob causas. Primum, quia facilius minutia quæuis minoribus numeris expressa intelligitur, quàm maioribus numeris scripta. Quis enim non facilius percipit $\frac{1}{2}$. quàm $\frac{36}{72}$. aut quàm $\frac{500}{1000}$. aut quàm $\frac{826}{1652}$. cum tamen omnes idem prorsus significent? Deinde, quoniam facilior redditur operatio fractionũ, si ad minimos terminos sint reductæ, vt ex sequentibus fiet perspicuum. Tertio, vt Mathematicorum libri, qui minutias plerunque minimis solent numeris notare, intelligantur. Si enim, verbi gratia, quis inueniat à quopiam scriptum, numerum hunc 2528. per 48. diuisum facere Quotientem 52. $\frac{2}{3}$. ipse vero hoc velit examinare, reperiet Quotientem 52 $\frac{32}{48}$. qui ab illo differre videtur, cum tamen idem sit. Minutia enim hæc $\frac{32}{48}$. ad minimos terminos reducta facit $\frac{2}{3}$. Quare antequam iudicet,

Cur minutiæ ad minimos terminos reducantur.

se, aut

se, aut scriptorem illum errasse, quòd videat eius minutiam à sua differre, reducenda prius erit minutia à se inuenta, & maioribus terminis expressa, ad minimos numeros, siue terminos.

Hac autem arte Minutia quæuis maioribus scripta numeris ad minimos terminos reuocabitur. Diuidatur tam numerator, quàm denominator per maximam communem vtriusque mensuram, id est, per maximum numerum, qui vtrumque metiatur. Quotientes enim numeri (si Quotientem numeratoris facias numeratorem, & Quotientem denominatoris denominatorem) dabunt minutiam illi æquiualentem, & minimis numeris expressam. Nam cum, diuisis duobus numeris per vnum & eundem numerum, Quotientes eandem habeant proportionem, quam illi numeri, sint autem Quotientes numeri hoc modo inuenti omniũ minimi, quòd numeri minutiæ propositæ diuisi sint per maximum numerum eos numerantem, ita vt per maiorem diuidi nequeant, quin aliquid in diuisione relinquatur; perspicuum est, minutiã inuentam minimis numeris esse expressam, ita vt minoribus exprimi nequeat.

Minutiæ, qua arte ad minimos numeros rediguntur.

Exemplum sit in hac minutia proposita $\frac{32}{48}$. cuius numeratorem, ac denominatorem metiuntur, & numerant omnes hi numeri 2. 4. 8. 16. & præterea nullus. Nam licet numerus 24. qui maior illis est, numeret denominatorem 48. tamen numeratorem 32. nõ metitur. Sic etiam quamuis numerus 32. qui

qui maior adhuc eſt, metiatur numeratorem 32. nullo tamen modo denominatorem 48. numerat. Nos autem hoc loco intelligimus numerum maximum numerantem, qui vtrumque numerum minutiæ propoſitæ, id eſt, tam numeratorem, quàm denominatorem, numeret. Si igitur tam numerator 32. quàm denominator 48. diuidatur per maximum illorum numerantem, nimirum per 16. reperientur Quotientes 2. & 3. Quare minutia propoſita $\frac{32}{48}$. reducetur ad hanc æquiualentem, $\frac{2}{3}$. & minimis numeris expreſſam. Si eoſdem numeros propoſitæ minutiæ diuideres per alium numerum eos numerantem, qui non ſit maximus, redigeres quidem minutiam ad aliam æqualem minoribus terminis expreſſam, ſed non minimis. Vt ſi ijdem numeri 32. & 48. diuidantur per 8. inuenietur hæc minutia $\frac{4}{6}$. quæ minorib⁹ adhuc numeris ſcribi poteſt, hoc modo $\frac{2}{3}$.

Eadem ratione hæc minutia, $\frac{45}{60}$. cuius numeratorem, & denominatorem metiuntur omnes hi numeri 3. 5. 15. redigetur ad hanc, $\frac{3}{4}$. ſi nimirum tã numerator, quàm denominator per 15. qui maximus numer⁹ eſt illos numerãs, diuidatur. atque ita de reliquis.

[illegible] do [illegible] tia [illegible] poteſt [illegible] ad minimos termi-nos.

Quod ſi alicuius minutiæ numeratorem, ac denominatorẽ nullus numerus, præter vnitatẽ, numeret, non poterit ad minores terminos redigi minutia illa, ſed iã minimis numeris expreſſa erit. Vt hæ minutiæ $\frac{20}{39}$. $\frac{20}{63}$. $\frac{47}{59}$. ad minores terminos reuocari non poſſunt. Quamuis enim hi numeri 2. 4. 5. 10. numeratorẽ primæ minutiæ numerent, nullus tamen

eorum

eorum eiusdem denominatorem metitur. Itē licet hi numeri 3. 13. metiantur denominatorem eiusdem minutiæ, neuter tamen eorum eius numeratorem metitur. Rursus quāuis hi numeri 2. 4. 5. 10. numeratorem secundæ minutiæ, hi vero 3. 7 9. 21. denominatorem eiusdem metiantur, nullus tamen illorum vtrumque numerum: id est, tam numeratorem, quā denominatorem illius minutiæ, numerat. Postremæ autem minutiæ numeros nullus numerus præter vnitatem numerat, cum sint (vt cum Arithmeticis loquamur) primi, quemadmodum & primarum duarum numeri sunt inter se primi, quamuis nullus eorum primus sit. Dicitur enim numerus primus quem vnitas sola metitur; Primi vero inter se numeri vocantur, quos sola vnitas, communis mensura metitur.

Primus numerus & primi inter se numeri quid.

Quoniā vero, vt minutia proposita ad minimos terminos reuocetur, necesse est, vt maxima mensura cōmunis numeratoris, ac denominatoris inueniatur. (Per hanc enim maximam cōmunem mensuram vterque numerus, tam numerator, quàm denominator, diuidendus est, vt diximus.) tradi solet ad eam inueniendam hæc regula. Diuidatur denominator per numeratorem: Et si aliquid in diuisione relictum fuerit, diuidatur diuisor, id est, numerator, per residuum illud diuisionis: Et si rursus aliquid remanserit, diuidatur vltimus hic diuisor, id est, residuum illud, per residuum huius vltimæ diuisionis; & sic semper vltimus diuisor per vltimum residuum diuidatur, do-

Qua ratione maxima mensura communis numeratoris, ac denominatoris cuiusuis minutiæ reperiatur.

nec diuisor occurrat, qui nihil in diuisione relinquat. Hic namq; diuisor nihil relinquens erit maxima communis mēsura numeratoris, ac denominatoris minutiæ propositæ. Quòd si diuisor aliquis in huiusmodi diuisionibus relinquat vnitatem, non habebūt numerator, & denominator minutiæ propositæ communem mensuram, prçter vnitatem, sed erūt numeri inter se primi.

Quando numerator, & denominator datæ minutiæ non habeant communem mensurā, præter vnitatem.

Vt si proposita sit minutia $\frac{36}{72}$. inueniemus maximam mensuram communem numeratoris, & denominatoris hoc modo. Diuidatur denominator 72. per numeratorem 36. & quoniam, hac diuisione peracta, nihil remanet, erit diuisor hic 36. maxima communis mensura; per quam si diuidamus numeratorem, denominatoremque datæ minutiæ $\frac{36}{72}$. reducemus eam ad $\frac{1}{2}$. minimis terminis expressam.

Rursus si data sit minutia $\frac{60}{96}$. reperiemus maximam communem mensuram numeratoris, & denominatoris hac ratione. Diuiso denominatore 96. per numeratorem 60. supersunt in diuisione 36. Diuiso rursus diuisore 60. per residuum 36. remanent in diuisione 24. Item diuiso hoc vltimo diuisore 36. per vltimum residuum 24. relinquuntur 12. diuiso denique vltimo hoc diuisore 24. per vltimum residuum 12. nihil superest. Est igitur maxima mensura communis 12. per quam si diuidatur tam numerator, quàm denominator datæ minutiæ $\frac{60}{96}$. cōstituetur hæc minutia $\frac{5}{8}$. minimis numeris expressa.

Sed si proponatur hæc minutia $\frac{48}{103}$. non inuenie-

ueniretur vlla communis menſura numeratoris, & denominatoris maior, quàm vnitas. Nam denominatore 103. diuiſo per numeratorem 48. ſuperſunt 7. Diuiſo item diuiſore 48. per reſiduum 7. relinquuntur 6. Denique diuiſo vltimo hoc diuiſore 7. per vltimum reſiduum 6. ſupereſt 1. Quare, vt ſupra dictum eſt, numerator, & denominator minutiæ huius $\frac{48}{103}$. ſunt numeri inter ſe primi.

Eadem ratione quorumlibet duorũ numerorum (licet fractionem non conſtituant, ſed abſolute proponantur.) maximam communem menſuram inueniemus, ſi maiorem per minorem diuidamus, & hunc diuiſorem per reſiduum diuiſionis, ſi quod erit, & rurſus hunc vltimum diuiſorem per reſiduum vltimæ diuiſionis, & ſic deinceps, &c. Nam vltimus diuiſor nihil relinquens in diuiſione erit maxima communis menſura datorum numerorum: Si vero in diuiſione aliqua fuerit relicta vnitas, erunt numeri dati inter ſe primi, nullamq; habebunt menſuram communem, præter vnitatem.

Inuentio maximæ menſuræ quorũlibet duorũ numerorum.

Colligitur hæc regula inueniendi maximam menſuram communem duorum numerorum ex propoſ. 2. lib. 7. Eucl. Nam licet Euclides iubeat ſemper minorem numerum de maiore ſubtrahere, tamen idem efficitur, & quidem multo breuius, per diuiſionem maioris numeri per minorem, cum diuiſio ſit compendioſa quædam ſubtractio, quemadmodum & multiplicatio compendioſa quædam additio eſt.

Vnde colligatur regula inueniendi maximã menſurã duorum numerorum.

Alia ratio redigendarũ minutiarũm ad minimos terminos.

Alio modo reducetur minutia proposita ad minimos terminos, si tam numerator, quã denominator per communem aliquam eorum mensuram notã, etiamsi maxima non sit, diuidatur, vt inueniatur minutia sub minoribus numeris: Et rursus huius inuentæ minutię tam numerator, quàm denominator, per aliam communem eorum mensuram diuidatur, & sic deinceps, donec minutia inueniatur, cuius numerator, & denominator sint numeri inter se primi. Vt proposita minutia hac $\frac{36}{48}$. si vterque eius numerus diuidatur per 2. inuenietur hæc minutia $\frac{18}{24}$. cuius vterque numerus si diuidatur per 3. reperietur hæc minutia $\frac{6}{8}$. cuius tandem numeri diuisi per 2. offerent hanc minutiã $\frac{3}{4}$. sub minimis terminis: sed prior illa ratio præstantior est, ac breuior.

REDVCTIO FRACTORVM NVMErorum ad eandem denominationem, & ad integra, nec non integrorum ad fractionem quamcunque, ac deniquefractionum fractorum numerorum ad simplices fractiones.

CAPVT X.

SAepenumero reducendæ sunt fractiones diuersorum denominatorum ad alias, quæ illis æquales sint, singulæ singulis, habeantq; eundem denominatorem. Quod qua ratione fieri debeat, hoc cap. exponemus, primum quidem, quando propositæ minutiæ non sunt plures, quàm duæ, deinde vero, quã-do

do plures ſunt.

Propoſitis igitur duabus minutijs diuerſos denominatores habentibus, ſi denominatores inter ſe multiplicentur, procreabitur communis denominator, ad quem datæ minutiæ ſunt reuocandæ: numerator vero cuiuslibet in crucem per denominatorem alterius multiplicatus producet numeratorem. Vt in hoc appoſito exemplo. Ex denominatore 3. in denominatorem 4. fit denominator communis 12. Item ex 2. numeratore prioris minutiæ in 4. denominatorem poſterioris fit numerator 8. At ex 3. numeratore poſterioris minutiæ in 3. denominatorem prioris fit numerator 9. Duæ ergo minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. ad has duas $\frac{8}{12}$. $\frac{9}{12}$. reducuntur, quæ illis æquales ſunt, habentque vnum & eundem denominatorem communem 12. Quòd enim $\frac{8}{12}$. æquiualeant $\frac{2}{3}$. conſtat ex propoſ. 17. & 18. lib. 7. Eucl. propterea quod vterque numerus huius multiplicatus per eundem numerum 4. vel multiplicans eundem numerum 4. nimirum denominatorem poſterioris minutiæ propoſitæ, produxit vtrunque numerũ illius. Hinc .n. fit, numeratorẽ & denominatorẽ minutiæ $\frac{8}{12}$. eãdem habere proportionẽ, quam habent numerator, & denominator minutiæ $\frac{2}{3}$. Quare æquales erunt minutiæ ipſæ, vt ſupra diximꝰ. Eadem ratione æquales erunt minutiæ $\frac{9}{12}$. & $\frac{3}{4}$. quia vterque numerus huius $\frac{3}{4}$. multiplicatus per eundem numerum 3. vel multiplicãs

Quo pacto duæ minutiæ ad candẽ denominationem reducantur.

$\frac{2}{3} \bowtie \frac{3}{4}$. reducuntur ad $\frac{8}{12}$. $\frac{9}{12}$.

eundem numerum 3. denominatorem videlicet prioris minutiæ datæ $\frac{2}{3}$. produxit vtrumque numerum illius $\frac{9}{12}$.

Si vero plures minutiæ, quàm duæ, ad eandem denominationem proponantur reducendæ, quærendus est primum numerus ab omnibus denominatoribus datarum minutiarum numeratus, ita vt omnes partes ab ipsis denominatas contineat. Ita autem numerum à denominatoribus propositis, vel à quibuscunque numeris datis numeratum inueniemus. Multiplicentur omnes denominatores inter se, ducendo primum in secundum, & hunc numerum productum in tertium, productumque hunc numerum in quartum, & sic deinceps, donec omnes sint multiplicati. Productus enim vltimus numerus erit is, qui quæritur. Vt propositis hisce minutijs $\frac{1}{2}$. $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{1}{5}$. si primus denominator 2. in secundum 3. multiplicetur, & productus numerus 6. in tertium 4. ducatur, productusq; numerus 24. in quartũ 5. multiplicetur, procreabitur numerus 120. quẽ dati denominatores, nempe numeri 2.3.4.5. numerant.

Inuentio numeri à quotcũque datis numeris numerati.

Quoniam vero nnmerus hac ratione inuentus interdum ita magnus est, vt eo minor dari possit, qui ab eisdem propositis denominatoribus numeretur, reperiemus minimum numerum à quotcunque numeris numeratum hoc modo. Primum inueniemus minimum numerum à prioribus duobus numeris propositis numeratum, hac ratione. Aut priores duo numeri habent communem aliquam mensuram, præter vnitatem, aut non: (Quod

Inuentio minimi numeri à quotcũque numeris numerati.

quidem

quidem cognosces, si maior per minorem diuidatur,& hic diuisor per residuum diuisionis,&sic deinceps; alterna quadam diuisione. Si enim diuisor occurrat, qui nihil relinquat, habebunt duo illi numeri communem mensuram, ipseque diuisor vltimus erit maxima eorum mensura: si vero occurrat diuisor, qui relinquat vnitatem, carebunt communi mẽsura, eruntque primi inter se, vt supra cap. 9. docuimus.) Si duo illi numeri priores non habent communem mensuram erit numerus ex multiplicatione vnius in alterum productus, minimus ab illis numeratus, ita vt minor dari non possit: Si vero habent mensuram communem, inuenta maxima earum mẽsura communi, per ea, quæ cap. 9. scripsimus, diuidatur vterque per eam, ponanturq; Quotientes sub ipsis numeris. Nam si Quotientem prioris numeri per posteriorem numerum multiplices, vel Quotientem posterioris numeri per priorem numerum, procreabis minimum numerum à duobus illis numeratum. Deinde eodem modo indagabimus minimum numerum numeratum ab eo, quẽ hactenus inuenimus, & à tertio numero proposito, inquirendo videlicet, num tertius numerus propositus, & minimus ille à prioribus duobus numeratus, habeant mensuram communem, necne, &c. Hic enim minimus inuentus, erit minimus à primis tribus numeris propositis numeratus. Rursus inuentum hunc numerum cum quarto numero proposito conferemus, eodemq; modo minimũ numerum ab illis numeratum inuestigabimus.

Hic enim inuentus, erit minimus à quatuor datis numeris numeratus: atque ita progrediar, donec nullus numerus supersit, cum quo inuentus vltimo loco comperiri possit. Demõstratio huius regulæ colligitur ex propos. 36. & 38. lib. 7. Eucl.

Sed explicemus negotium hoc in proximis quatuor minutijs datis, quarum denominatores sunt 2. 3. 4. 5. Primum itaque quia duo priores numeri 2. & 3. non habent aliam mensuram communem, præter vnitatem erit numerus 6. ex eorum multiplicatione, productus, minimus à 2. & 3. numeratus. Deinde, quoniã inuentus hic numerus 6. & tertius numerus datus 4. habent maximã mensuram 2. diuidemus per eam tã 6. quàm 4. quotientesq; 3. & 2. sub ipsis statuemus, vt hic vides. Si nanq; multiplicemus 6 per 2. aut 4. per 3. procreabimus numerũ 12. qui minimus est, à tribus primis datis numeris 2. 3. 4. numeratum. Tandem, quia hic numerus 12. inuentus, & quartus numerus datus 5. non habent communẽ mensuram, præter vnitatem, multiplicabimus 12. per 5. producemusq; numerũ 60. minimũ à quatuor denominatoribus 2. 3. 4. 5. numeratũ.

6.	4.
3.	2.

Sit rursũ inueniendus minimus numer⁹ à 4. 6. 8. 12. 7. numeratus. Primum, quia primi duo 4. & 6. habent communẽ maximam mensurã 2. partiemur per eam tã 4. quã 6. quotientesq; 2. & 3. sub ipsis statuemus, vt hic vides. Nã si multiplicemus 4. per 3. vel 6. per 2. efficiemus numerum 12. minimũ ab illis duobus 4. & 6. numeratũ. Deinde, quia numerus

4.	6.
2.	3.

hic 12. inuẽtus, & tertius numerus datus 8. habent maximam mensuram communẽ 4. diuidemus per eam tam 12. quã 8. & quotientes 3. & 2 sub ipsis collocabimus. Si enim multiplicemus 12. per 2. vel 8. per 3. gignemus numerũ 24. minimũ à primis tribus datis numeris 4. 6. 8. numeratum. Rursus, quoniã hic numerus inuentus 24. & quartus propositus 12. habẽt communem maximã mẽsuram 12. diuidemus per eam tam 24. quàm 12 & quotiẽtes 2. & 1. ponemus sub ipsis. Nam si multiplicemus 24. per 1. vel 12. per 2. producemus numerum 24. minimũ à quatuor numeris datis 4. 6. 8. 12. numeratum. Postremo, quia hic numerus 24. inuentus, & vltimus numerus datus 7. non habent vllam mensuram cõmunem, præter vnitatẽ; multiplicabimus illos inter se, procreabimusque numerum 168. minimum à datis numeris 4. 6. 8. 12. 7. numeratum. Quòd si quis per priorem regulam numerum inquireret ab eisdem datis numeris 4. 6. 8. 12. 7. numeratũ, multiplicando nimirum ipsos inter se, reperiret hunc numerum 16128. qui multo maior est quàm hic numerus minimus 168. à nobis inuentus.

12.	8.
3.	2.

24.	12.
2.	1.

Iam vero, inuento numero ab omnibus denominatoribus minutiarũ reducendarũ numerato, siue is minim⁹ sit, siue non, reducem⁹ minutias datas ad eandem denominationem hoc modo. Denominator communis est numerus ille inuentus: quem si per cuiuslibet minutiæ

Quo pacto plures minutiæ, quã duæ, ad eandẽ denominationẽ reducantur.

minutiæ denominatorem diuidamus, & quotientem per numeratorem multiplicemus, producemus numeratorem, qui supra communem denominatorem scribendus est. Vt in postremis quatuor minutijs $\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{3}{4}.\frac{1}{5}$. numerus à denominatoribus numeratus est 120. Hic ergo erit denominator communis. Quem si diuidamus per 2. denominatorem primæ minutiæ, efficiemus 60. Hunc numerum si multiplicemus per 1. numeratorem eiusdem minutiæ, producemus 60. numeratorem pro prima minutia. Rursus si eundem numerum 120. partiamur per 3. denominatorem secundæ minutiæ, prodibit hic numerus 40. quem si multiplicemus per 2. numeratorem eiusdem minutiæ, efficiemus 80. numeratorem pro secunda minutia, atque ita de cæteris. Itaque datæ quatuor minutiæ reducentur ad has quatuor eiusdem denominationis $\frac{60}{120}.\frac{80}{120}.\frac{90}{120}.\frac{24}{120}$. Quod si accipiamus numerũ 60. qui minimus est ab eisdẽ denominatoribus numerat⁹, pro denominatore reducemus easdẽ minutias ad has $\frac{30}{60}.\frac{40}{60}.\frac{45}{60}.\frac{12}{60}$.

Alia ratio reducendi duas minutias ad eandem denominationem.

Eadem ratione redigi poterunt duæ etiã minutiæ ad eandem denominationem, licet eas non in crucem multiplicemus. Si enim quæratur numerus siue minimus, siue non minimus, à denominatoribus numeratus, erit is communis denominator: ex quo inuenientur numeratores, vt proxime docuimus. Vt propositis duabus minutijs $\frac{5}{6}.\frac{7}{12}$. Minim⁹ numerus à denominatoribus numeratus est 12. quem si partiamur per 6. denominatorem prioris minutiæ, quotientemq́; 2. per 5. numerato-

meratorē eiusdem minutiæ multiplicemus, efficiemus 10. pro numeratore prioris minutiæ. Et si rursum eundem numerum 12. diuidamus per 12. denominatorē posterioris minutiæ; & quotientem 1. multiplicemus per 7. numeratorem eiusdem minutiæ, reperiemus 7. pro numeratore posterioris minutiæ. Itaq; datæ duæ minutiæ reducentur ad has $\frac{10}{12}$. $\frac{7}{12}$. Quod si quis easdem velit reducere per primam regulam, inueniet has minutias $\frac{60}{72}$. $\frac{42}{72}$. Ex quibus omnibus perspicuum est, quantum intersit inter minimum numerum à denominatoribus datarum minutiarum numeratum, & non minimum. Per minimum enim datæ minutiæ ad minimas minutias eiusdem denominationis reducuntur, quod per alias regulas non fit.

Vtilitas minimi numeri à denomi-natorib. datarum minutiarum nu-merati.

Contingit etiam aliquando, numeratorē minutiæ ex additione, multiplicatione, diuisioneq; productæ maiorem esse denominatore, atq; adeo minutiam illam totum ipsum, atq; integrum superare. Quare ea ad integra erit reducenda hac ratione: Diuidatur numerator per denominatorem. Quotiens enim dabit integra, quibus minutia data æquiualet: Et si quid in diuisione superfuerit, illud erit numerator, cui idē denominator subscribendus est. Vt hæc minutia $\frac{60}{12}$. si numerator diuidatur per denominatorem, reducetur ad 5. integra. Hæc autē minutia $\frac{100}{7}$. redigetur ad $14\frac{2}{7}$. quia in diuisione numeratoris per denominatorem remanserunt 2. atq; ita minutia illa continet 14. integra, & insuper duas septimas partes vnius integri.

Quo modo minutia, cuius numerator maior est denominatore, ad integra redigatur.

Item

Quo pacto integra ad minutiã reducantur.

Item non raro vsu venit, vt integra ad fractionem aliquam reducenda sint. quod hoc modo fiet. Multiplicentur integra proposita per denominatorem minutiæ, ad quam integra reducenda sunt. Productus enim numerus erit numerator, cui denominator datæ minutiæ est subscribendus. Vt si 7. integra ad quintas partes sint redigenda; Multiplicabimus 7. integra per 5. denominatorem propositæ minutiæ, productoque numero 35. supponemus eundem denominatorem, vt fiat minutia $\frac{35}{5}$. æquiualens 7. integris. Quod si integris adhæreat minutia aliqua, addendus est numerator illius minutiæ ad numerum productum ex integris per denominatorem minutiæ multiplicatis, vt efficiatur numerator. Vt si numerus hic $8\frac{2}{5}$. reducendus sit ad quintas, vt fiat vnica minutia; Multiplicabimus 8. per 5. denominatorem adhærentis minutiæ, ac numero producto 40. addemus 2. numeratorem eiusdem minutiæ, vt habeamus numeratorem 42. huius minutiæ $\frac{42}{5}$. quæ numero proposito $8\frac{2}{5}$. æquiualet.

Minutiæ minutiarum quo pacto ad simplices minutias reuocentur.

Postremo, quando in operatione aliqua minutiæ minutiarum occurrunt, reducendæ erunt ad simplicem minutiam, hoc artificio. Multiplica numeratores inter se, hoc est, primum in secundum, & hoc productum in tertium, atque iterum hoc productum in quartum, & sic deinceps, si plures numeratores fuerint. Vltimus enim numerus productus dabit numeratorē simplicis minutiæ, quæ illi minutiæ minutiarũ æqualis erit. Denominator autem erit numerus productus ex multi-

plicatione

plicatione denominatorum inter se, si multiplicentur, vt de numeratoribus dictum est. Vt hæc minutia minutiæ $\frac{3}{5}.\frac{4}{7}.$ reducetur ad hanc simplicem fractionem $\frac{12}{35}.$ quia multiplicatio numeratorum facit 12. denominatorum autem 35. ita vt tres quintæ quatuor septimarum partium vnius integri contineant $\frac{12}{35}.$ eiusdem integri. Sic etiam hæc minutia minutiarum $\frac{2}{3}.\frac{3}{4}.\frac{1}{6}.\frac{1}{2}.$ reducetur ad hanc simplicem $\frac{6}{144}.$ quæ ad minimos numeros reducta faciet $\frac{1}{24}.$ vt ex antecedenti cap. constat. Denique hæc minutia minutiarum $\frac{3}{4}.\frac{2}{3}.\frac{3}{5}.$ ad hanc simplicem reuocabitur $\frac{18}{60}.$ quæ reducta ad minimos numeros faciet $\frac{3}{10}.$

Hoc autem ita esse, explicabimus hoc modo. Ponamus hanc vltimam minutiam minutiarum $\frac{3}{4}.\frac{2}{3}.\frac{3}{5}.$ esse desumptam ex vno aureo. Necesse est igitur, si regula præscripta vera est, eam continere tres Iulios, qui sunt $\frac{3}{10}.$ vnius aurei. Id quod quilibet facile perspiciet. Nam $\frac{3}{5}.$ vnius aurei continent 6. Iulios, quòd duo Iulij sint $\frac{1}{5}.$ aurei vnius: At $\frac{2}{3}.$ sex Iuliorum sunt 4. Iulij; & $\frac{3}{4}.$ quatuor Iuliorum sunt 3. Iulij. Eadem ratione hanc minutiam minutiarum $\frac{1}{3}.\frac{2}{5}.\frac{1}{3}.$ recte ad hanc $\frac{2}{45}.$ esse reuocatam, in hoc, numero 45. ostendemus. Nam $\frac{1}{3}.$ huius numeri 45. continet 15. vnitates; ex quibus si sumantur $\frac{2}{5}.$ accipientur 6. vnitates ex quib⁹ deniq; si accipiatur $\frac{1}{3}.$ sumentur 2. vnitates, quæ faciunt $\frac{2}{45}.$ dicti numeri 45. Non secus alia exempla explicari poterunt, & probari.

ADDI-

ADDITIO FRACTORVM NV-merorum. CAP. XI.

Additio minutiarum quo modo fiat.

SI minutiæ addendæ habeant eundem denominatorem, addendi ſunt numeratores, & aggregato idem denominator ſupponendus: Si vero diuerſos habeant denominatores, reducendæ ſunt prius ad eundem denominatorem, & tunc eodem modo additio inſtituenda. Vt ſumma collecta ex hiſce tribus minutijs $\frac{2}{13}$. $\frac{4}{13}$. $\frac{6}{13}$. eſt hæc $\frac{12}{13}$. quia habent eundem denominatorem, ſummaque ex numeratoribus collecta eſt 12. quemadmodũ ex 2. aureis, 4. aureis, & 6. aureis fiunt 12. aurei. Sic etiam ex hiſce minutijs $\frac{3}{10}$. $\frac{7}{10}$. colligitur hæc ſumma $\frac{10}{10}$. quæ vni integro æquiualet. Ita quoque ex his minutijs $\frac{4}{7}$. $\frac{3}{7}$. $\frac{5}{7}$. $\frac{6}{7}$. colligitur hæc ſumma $\frac{18}{7}$. quæ reducta ad integra facit $2\frac{4}{7}$. At vero vt hæ minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. in vnam ſummam colligantur, reducendæ prius ſunt ad eundem denominatorem, nimirum ad has minutias $\frac{8}{12}$. $\frac{9}{12}$. ex quibus in vnã ſummam collectis fiunt $\frac{17}{12}$. hoc eſt, $1\frac{5}{12}$. atque hęc eſt ſumma duarum minutiarum propoſitarũ, quemadmodum ex 2. aureis & 3. iulijs, ſi 2. aurei reducantur ad 20. iulios, fiunt 23. iulij. Sic etiam minutiæ hæ $\frac{6}{7}$. $\frac{12}{13}$. $\frac{10}{11}$. $\frac{4}{5}$. vt in vnam ſummam colligantur, reducendæ prius ſunt ad has eiuſdem denominationis $\frac{4290}{5005}$. $\frac{4620}{5005}$. $\frac{4550}{5005}$. $\frac{4004}{5005}$. ex quibus fit hæc ſumma $\frac{17464}{5005}$. id eſt, $3\frac{2449}{5005}$.

Quando integra adſunt quid faciẽdum.

Si integra adſint, addenda ſunt ea ſeorſum, & minutiæ etiam ſeorſum. Vt ex 8. & $\frac{3}{7}$. fiunt $8\frac{3}{7}$. Item ex 8. & $4\frac{2}{3}$. fiunt $12\frac{2}{3}$. Item ex $8\frac{2}{7}$. & $4\frac{6}{7}$. fiunt

fiunt $12\frac{8}{7}$. hoc est, $13\frac{1}{7}$. Item ex $8\frac{2}{3}$. & $4\frac{3}{4}$. fiunt $12\frac{17}{12}$. id est $13\frac{5}{12}$.

Praxis addēdi minutias diuersarum denominationum inter se.

Itaque vt duæ minutiæ diuersarum denominationum in vnam colligantur summam, multiplicandę eæ sunt in crucem, & producti numeri addendi, vt fiat numerator minutiæ producendæ: Deinde denominatores inter se multiplicandi, vt eiusdem minutiæ denominator habeatur: quia hac ratione reducuntur duæ minutiæ ad eandem denominationem, vt ex præcedenti cap. patet, addũturque numeratores inter se. Vt si hæ duæ minutiæ $\frac{2}{3}.\frac{3}{4}$. sint addēdæ, multiplicabimus tam 2. numeratorem prioris per 4. denominatorem posterioris, quàm 3. numeratorem posterioris per 3. denominatorem prioris, productosque numeros 8. & 9. in vnam summam colligemus, vt fiat numerator 17. Deinde productum numerum ex multiplicatione denominatorum inter se, nempe 12. faciemus denominatorem. Erit igitur minutia collecta $\frac{17}{12}$. Quod si sint plures minutiæ addendæ, quã duæ, addemus primum priores duas, vt diximus. Deinde minutiam collectam cum tertia minutia eodem modo: Et hanc productam cũ quarta, & ita deinceps. Vt si addendæ sint hæ minutiæ $\frac{2}{3}.\frac{3}{4}.\frac{4}{5}.\frac{5}{7}$. colligemus primum ex prioribus duabus hanc $\frac{17}{12}$. Deinde ex hac, & tertia efficiemus eodē modo $\frac{133}{60}$. Deniq; ex hac, & quarta procreabimus $\frac{1231}{420}$. hoc est $2\frac{391}{420}$. summam omnium.

Probatio additionis minutiarum.

Probatio autem additionis fit per subtractionem. Subtracta enim altera minutiarum addendarum ex summa collecta, remanebit

altera, si in additione erratum non est. Quod si plures sint addendæ minutiæ, subtracta vna earum ex summa, relinquetur minutia alijs simul sumptis æqualis. Vt quoniam hæ minutiæ $\frac{3}{4}$. $\frac{5}{12}$. additæ faciunt $\frac{56}{48}$. id est, $1\frac{4}{48}$. si ex hac summa subtrahatur prior minutia, nẽpe $\frac{3}{4}$. vt in sequẽti c. docebimus, remanebit hęc minutia $\frac{80}{192}$. quæ æqualis est alteri minutiæ $\frac{5}{12}$. vt patet, si ad minimos terminos reuocetur, vel numeratores per denominatores in crucẽ multiplicentur. Producetur .n. idẽ numerus tam ex 80. in 12. quã ex 5. in 192. nempe numerus 960. Quare, vt supra capit. 7. diximus, æquales sunt minutiæ $\frac{80}{192}$. $\frac{5}{12}$.

SVBTRACTIO FRACTORVM NVmerorum. CAP. XII.

SI duæ minutiæ, quarum minor ex maiore subducenda est, habeant eundem denominatorem, subtrahendus est numerator minutiæ subtrahendæ ex numeratore alterius, & residuo idem denominator subscribendus. Si vero diuersos habeant denominatores, reducendæ sunt prius ad eundem denominatorem, & tunc eodem modo instituenda subtractio. Vt si subtrahenda sit hæc minutia $\frac{5}{17}$. ex ista $\frac{8}{17}$. subtrahemus numeratorem 5. ex numeratore 8. & residuo 3. eundẽ denominatorem 17. supponemus, vt fiat minutia residua $\frac{3}{17}$. quemadmodum si 5. aurei ex 8. aureis tollantur, remanent 3. aurei. At verò si deducenda sit hęc minutia $\frac{2}{3}$. ex ista $\frac{8}{9}$. reducendæ erunt prius ambæ ad has $\frac{18}{27}$. $\frac{24}{27}$. eiusdẽ denomi-

denominationis: Deinde numerator 18. ex numeratore 24. deducendus, residuoque 6. communis denominator 27. supponendus, vt fiat minutia residua $\frac{6}{27}$. quemadmodum, si 2. Iulij auferendi sint ex 8. aureis, reducẽdi sunt prius 8. aurei ad 80. Iulios, vt relinquãtur 78. Iulij.

Si ab integris detrahẽda est aliqua fractio, reducenda est vna vnitas integrorum ad fractionem eiusdem denominatoris, ita vt fiat minutia, cuius numerator ęqualis sit denominatori, à qua deducenda est minutia proposita. Vt si ex 10. auferenda sit minutia $\frac{6}{11}$. faciemus ex vna vnitate $\frac{11}{11}$. ex quibus si auferamus $\frac{6}{11}$. remanebunt 9. $\frac{5}{11}$. Integra enim carebunt illa vnitate, quæ ad minutiã reducta est. Quando integra adsunt, uid faciendum sit.

Si vero ab integris detrahenda sint integra, & præterea fractio aliqua, reducenda quoque est vna vnitas illorum integrorum ad minutiam eiusdem denominationis: Deinde integra à reliquis integris, & fractio à fractione detrahenda. Vt si hic numerus $4\frac{3}{5}$. subducẽdus sit ex 10. faciemus ex vna vnitate huius numeri minutiam hanc $\frac{5}{5}$. à qua si demantur $\frac{3}{5}$. relinquentur $\frac{2}{5}$. & si 4. auferantur ex reliquis 9. supererunt 5. Itaque totus numerus residuus erit $5\frac{2}{5}$.

Denique si ab integris vna cum fractis detrahenda sint integra cum fractis, vel fractiones solæ; si quidẽ fractio detrahenda minor est, quã illa, à qua fit subtractio, vel ili æqualis, detrahenda est fractio à fractione; & integra ab integris: si vero fractio subtrahenda maior est, quam illa, à qua fit subtractio,

reducenda est vna vnitas integrorum, à quib' subtractio fieri debet, ad fractionē, quæ illis adhæret, &c. Vt si hic numerus $6\frac{3}{4}$. subducendus sit ex hoc $10\frac{1}{2}$. quoniam minutia $\frac{3}{4}$. maior est, quàm $\frac{1}{2}$. faciemus ex vna vnitate horū integrorum 10. hanc minutiam $\frac{2}{2}$. quæ cum $\frac{1}{2}$. faciet $\frac{3}{2}$. à qua si auferatur iminutia $\frac{3}{4}$. relinquetur minutia $\frac{6}{8}$. Ablatis quoque 6. ex 9. supersunt 3. Totus ergo numerus residuus est $3\frac{6}{8}$.

Quando plures sunt minutiæ quid agēdum.

Quod si quādo vna minutia à pluribus fuerit subtrahenda, vel plures ab vna, vel plures à pluribus, danda erit opera, vt prius plūres illæ tam subtrahendæ, quàm illæ, à quibus fieri debet subtractio, in vnam summam colligantur.

Praxis subtrahēdi minutiam à minutia.

Itaque vt fiat subtractio vnius minutiæ ab alia, cum denominatores sunt diuersi, multiplicandi sunt numeratores in crucem per denominatores, & vnum productum ab altero subducendum, residuoque supponendus numerus ex multiplicatione denominatorum inter se productus: quia hac ratione duæ minutię propositę reducuntur ad eandem denominationem, &c. Vt si minutia $\frac{3}{4}$. ex minutia $\frac{7}{9}$. subtrahenda sit, multiplicabimus 3. numeratorem minutiæ subtrahēdæ per 9. denominatorem alterius, & productum 27. detrahemus ex numero 28. producto ex multiplicatione 7. numeratoris minutiæ, à qua fit subtractio, per 4. denominatorem alterius. & reliquæ vnitati supponemus numerum 36. productum ex multiplicatione denominatorum inter se, vt fiat minutia relicta $\frac{1}{36}$.

Probatio autem subtractionis fit per additionem.

tionem. Si namque minutia relicta ad subtractam minutiam adijciatur, componetur minutia illa, à qua subtractio facta est, si non est erratum. Vt quoniam subtracta minutia hac $\frac{3}{4}$. ex ista $\frac{7}{9}$. relinquitur hæc minutia $\frac{1}{36}$. vt in proximo exemplo patuit; si addatur $\frac{1}{36}$. ad $\frac{3}{4}$. componetur hæc minutia $\frac{112}{144}$. quæ ad minimos terminos reducta erit hæc $\frac{7}{9}$. à qua nimirum facta est subtractio. Sic etiam, quia subtracta hac minutia $\frac{2}{3}$. ex ista $\frac{6}{8}$. reliqua est minutia hæc $\frac{2}{24}$. si ea addatur ad $\frac{2}{3}$. fiet minutia $\frac{54}{72}$. quæ æqualis est minutiæ $\frac{6}{8}$. à qua subtractio facta est: vt patet, si vtraque ad minimos terminos reuocetur. Semper enim reperietur minutia hęc $\frac{3}{4}$. Vel certe, quia numeratores earum in crucem per denominatores multiplicati producunt eundem numerum, nimirum 432.

Probatio subtractionis minutiarũ.

MVLTIPLICATIO FRACTOrum numerorum. CAP. XIII.

SI numeratores inter se multiplicentur, producetur numerator summæ multiplicationis, ex denominatorum autem multiplicatione denominator eiusdem gignetur. Vt ex multiplicatione $\frac{2}{3}$. per $\frac{3}{4}$. fient $\frac{6}{12}$. hoc est, $\frac{1}{2}$. Numeratores enim inter se multiplicati faciunt 6. denominatores vero 12.

Multiplicatio minutiarũ quo pacto fiat.

Quando minutia per numerum integrũ multiplicanda est, supponenda est numero integro vnitas, vt fiat ex ipso quasi fractio quædam denominata ab vnitate integra. Deinde regula, quam proxime præscripsimus, seruanda. Vt si

$\frac{8}{1}$. $\frac{4}{7}$.

Quando adsunt integra quid agẽdum.

multiplicanda sint 8. per $\frac{4}{7}$. scribemus 1. sub 8. vt in apposito exemplo vides. Igitur si multiplicentur inter se tam numeratores, quàm denominatores, producetur hæc minutia $\frac{32}{7}$. quæ æquiualet huic numero $6\frac{2}{7}$.

Quando autem numero integro adhæret minutia, reducendus erit numerus integer ad illā miuuutiam, vt fiat vna fractio ex ipso & minutia adiuncta. Vt si multiplicanda sint 8. per $3\frac{5}{6}$. faciemus ex $3\frac{5}{6}$. minutiam $\frac{23}{6}$. & numero 8. supponemus 1. vt hic factum esse vides. Si igitur tam numeratores inter se, quàm denominatores multiplicentur, procreabitur hæc minutia $\frac{184}{6}$. huic numero $30\frac{4}{6}$. æquiualens.

$\frac{8}{1}$. $\frac{23}{6}$.

Item si multiplicanda sint $4\frac{2}{3}$. per $\frac{1}{2}$. reducemus $4\frac{2}{3}$. ad $\frac{14}{3}$. vt hic vides. Producetur autem ex multiplicatione minutia hæc $\frac{14}{6}$. id est, $2\frac{2}{6}$. Eodem pacto si multiplicanda sint $4\frac{1}{2}$. per $3\frac{1}{5}$. reducemus priorem numerum ad $\frac{9}{2}$. posteriorem vero ad $\frac{16}{5}$. vt in apposito exemplo vides. Multiplicatis autem tam numeratoribus inter se, quā denominatoribus, producetur hæc minutia $\frac{144}{10}$. hoc est, $14\frac{4}{10}$.

$\frac{14}{3}$. $\frac{1}{2}$.

$\frac{9}{2}$. $\frac{16}{5}$.

Probatio multiplicationis minutiarum.

Examinatur autem multiplicatio per diuisionem. Si enim minutia producta diuidatur per alteram minutiarum multiplicantium, prodibit necessario iu quotiente altera minutia multiplicans. Vt si ex multiplicatione $\frac{1}{2}$. per $\frac{4}{7}$. fiunt $\frac{4}{14}$. necesse est, vt diuisis $\frac{4}{14}$. per $\frac{1}{2}$. producantur $\frac{4}{7}$. diuisis autem eisdem $\frac{4}{14}$. per $\frac{4}{7}$. gignatur $\frac{1}{2}$. Perspicuum autem erit ex

sequenti

ſequēti cap. diuiſis $\frac{4}{14}$. per $\frac{1}{2}$. produci $\frac{8}{14}$. quæ minutia huic $\frac{4}{7}$. ęquiualet; diuiſis autem eiſdē $\frac{4}{14}$. per $\frac{4}{7}$. produci $\frac{28}{56}$. hoc eſt, $\frac{1}{2}$.

Nemini autem mirum videri debet, multiplicationem minutiarum producere ſemper minutiam minorem vtraque minutia multiplicante; vt in vltimo exemplo, quod in examine tradidimus, patet, vbi ex multiplicatione $\frac{1}{2}$. per $\frac{4}{7}$. producta eſt minutia $\frac{4}{14}$. id eſt, $\frac{2}{7}$. quæ minor eſt vtraque minutia multiplicante. Si enim natura multiplicationis recte conſideretur, facile quiuis perſpiciet, hoc neceſſario ita debere fieri. Cum enim vnus numerus per alium multiplicari, ſeu duci dicatur, cum alter ipſorum toties augetur, quoties in altero continetur vnitas, vt cap. 4. diximus, perſpicuum eſt, neutram minutiarū multiplicantiū poſſe totā ſumi in producto, ſed fragmenta duntaxat ipſius, qualia nimirū fragmenta vnitatis, altera minutia multiplicans refert, quandoquidē hæc minutia minor eſt vnitate. Hinc enim fit, vt quemadmodum minutia multiplicans nō continet integram vnitatē; ita quoq; numerus productus nō cōtineat totā alteram minutiā multiplicantē, vt in proximo exēplo, quemadmodū $\frac{1}{2}$. eſt dimidiata pars vnitatis, ita etiā numerus productus $\frac{4}{14}$. id eſt, $\frac{2}{7}$. eſt pars dimidiata huius minutiæ $\frac{4}{7}$. vt definitio multiplicationis poſtulat. Recte ergo ex multiplicatiōe $\frac{1}{2}$. per $\frac{4}{7}$. producitur minutia hæc $\frac{4}{14}$. hoc eſt, $\frac{2}{7}$. Sic etiā ex multiplicatione 9. per $\frac{1}{3}$. producitur minutia hęc $\frac{9}{3}$. id eſt, numer⁹ hic 3. Nā quemadmodū $\frac{1}{3}$. eſt tertia pars vnitatis, ita numerus 3. tertia

Cur in multiplicatione minutiarum producatur minutia minor vtraq; minutia multiplicante.

pars est numeri 9. vel quemadmodum numerus productus 3. continet $\frac{1}{3}$. nouies, ita numerus 9. continet nouem vnitates. Non est igitur mirum, quod minor numerus producatur vtraque minutia multiplicante. Si tamen integra per fractionem multiplicentur, producitur quidem numerus quoque minor illo numero integro, maior vero fractione multiplicante. Vt in proximo exemplo patuit, vbi ex multiplicatione 9. per $\frac{1}{3}$. productus numerus fuit $\frac{9}{3}$. hoc est, 3. Sic etiam si integra per integra cum fractione, vel integra cum fractione per integra cũ fractione multiplicentur, semper producetur maior numerus vtroque numero multiplicante, propter numerum integrum multiplicantem integra. Vt ex multiplicatione 4. per $3\frac{1}{4}$. fit numerus $\frac{52}{4}$. hoc est, 13. quia numerus 4. ter sumptus facit 12. & quarta eius pars est 1. Vel quia numerus 3. sumptus quater facit 12. & minutia $\frac{1}{4}$. sumpta quater facit $\frac{4}{4}$. id est, 1.

DIVISIO FRACTORVM NVmerorum CAP. XIV.

Diuisio minutiarum quo modo fiat.

FAcilitatis gratia Diuisionis regula ad regulam multiplicationis reduci poterit hoc modo. Commutentur termini diuisoris, id est, numerator scribatur infra lineolam, & denominator supra eandē. Quo facto, si regula multiplicationis cap. praecedenti tradita seruetur, id est, si tam numeratores, quàm denominatores inter se multiplicentur, producetur numerus Quotiens. Vt si dini-

diuidenda sit minutia $\frac{3}{2}$. per $\frac{1}{2}$. stabit exemplum, vt hic vides. Multiplicatis igitur tam numeratoribus, quàm denominatoribus inter se, producetur minutia hæc $\frac{6}{2}$. hoc est, numerus 3. pro Quotiente.

$\frac{3}{2}$. $\frac{2}{1}$.

Sic etiam si diuidēda sit minutia $\frac{2}{7}$. per $\frac{3}{7}$. stabit exemplum, vt hic apparet . Quotiens autem erit $\frac{14}{21}$.

$\frac{2}{7}$. $\frac{7}{3}$.

Quando numerus integer per minutiam, vel per numerum integrum cum fractione diuidendus est: vel minutia per numerum integrum, vel per numerum integrum cum fractione ; vel deniq; numerus integer cum fractione per minutiam, aut per numerum integrum, aut per numerum integrum cum fractione, supponenda est vnitas numero integro

Quando adsunt integra, qd agendum.

	ita stabunt exempla.			*Quotientes.*
6. *per* $\frac{2}{3}$.		$\frac{6}{1}$.	$\frac{3}{2}$.	$\frac{18}{2}$. *vel* 9.
6. *per* 4 $\frac{2}{3}$.		$\frac{6}{1}$.	$\frac{3}{14}$.	$\frac{18}{14}$. *vel* 1 $\frac{2}{7}$.
$\frac{2}{3}$. *per* 6.		$\frac{2}{3}$.	$\frac{1}{6}$.	$\frac{2}{18}$. *vel* $\frac{1}{9}$.
$\frac{2}{3}$. *per* 6 $\frac{1}{2}$.		$\frac{2}{3}$.	$\frac{2}{13}$.	$\frac{4}{39}$.
6 $\frac{1}{2}$. *per* $\frac{3}{4}$.		$\frac{13}{2}$.	$\frac{4}{3}$.	$\frac{52}{6}$. *vel* 8 $\frac{2}{3}$.
6 $\frac{1}{2}$. *per* 3 $\frac{2}{5}$.		$\frac{13}{2}$.	$\frac{5}{17}$	$\frac{65}{34}$. *vel* 1 $\frac{31}{34}$.
6 $\frac{1}{2}$. *per* 3 $\frac{4}{5}$.		$\frac{13}{2}$.	$\frac{5}{19}$.	$\frac{65}{38}$. *vel* 1 $\frac{27}{38}$.

ſi ei non adhæreat minutia, ſi vero minutia ei adiũcta ſit, reducẽdus eſt numerus integer ad minutiam adiũctam, vt fiat vna minutia, quẽadmodum cap. præcedente diximus. Deinde regula iam præſcripta ſeruanda. Vt in ſequentibus diuiſionibus ſtabunt exempla, vnà cum Quotientibus, vt hic vides.

Qua ratione alij diuiſionẽ minutiarum doceant.

Alij tradunt hanc regulam diuiſionis minutiarum. Numerator minutiæ diuidẽdæ (poſita vnitate ſub integris, ſi adſint, & reductis, integris ad minutiam adhærentem, ſi qua adhæreat) multiplicetur per denominatorem minutiæ diuidentis; procreabitur enim hac ratione numerator quotientis minutiæ. Denominator autem producetur ex multiplicatione denominatoris minutiæ diuidendæ per numeratorem diuidentis minutiæ. Quod quidem idem eſt, ac ſi termini diuiſoris commutentur, & regula multiplicationis ſeruetur, vt perſpicuum eſt. Quoniam vero ambigere quiſpiam poſſet aliquando, an numerator minutiæ diuidẽdæ, an vero diuidẽtis producat numeratorem minutiæ Quotientis, (facile enim hæc res ex animo excidere poteſt,) magis mihi placet prior regula à nobis tradita, qua diuiſionis regula ad regulam multiplicationis reuocatur.

Probatio diuiſiõis minutiarum.

Examen autem diuiſionis fit per multiplicationem, Nam ſi Quotiens minutia multiplicetur per minutiam diuidentem, producetur minutia diuiſa neceſſario. Vt quia ex diuiſione $\frac{4}{5}$. per $\frac{1}{2}$. producitur minutia $\frac{8}{5}$. hoc eſt, 1 $\frac{3}{5}$. fit, vt ex multiplicatione 1 $\frac{3}{5}$. per $\frac{1}{2}$. producatur minutia diuiſa $\frac{4}{5}$. Producitur autem

ex hac

ex hac multiplicatione minutia $\frac{8}{10}$. quæ huic $\frac{4}{5}$. æqualis est, vt patet.

Quod autem in diuisione minutiarum plerunque producatur Quotiens maior minutia diuisa, vt in diuisione $\frac{6}{7}$. per $\frac{2}{7}$. patet, in qua Quotiens est $\frac{42}{14}$. hoc est, 3. mirari nemo debet. Nam cum numerus Quotiens indicet, quoties diuisor in diuidendo numero contineatur, manifestum est, quando minutia diuidens minor est minutia diuidenda, illam in hac sæpius quàm semel contineri; atque adeo Quotientem maiorem esse quàm 1. etiamsi minutia diuidenda minor sit, quàm 1. Veluti in proximo exemplo, quoniam minutia diuidens $\frac{2}{7}$. in minutia diuidenda $\frac{6}{7}$. cõtinetur ter, fit, vt Quotiens sit 3. indicans illam in hac ter contineri. Idem etiam ex definitione Diuisionis perspicue apparet. Cum enim diuisio sit inuentio numeri, qui toties vnitatem contineat, quoties numerus diuidendus diuisorem continet, vt cap. 5. diximus: perspicuum est, in proxima diuisione Quotientem debere esse 3. qui vnitatem ter contineat, quoties nimirum minutia diuidenda $\frac{6}{7}$. minutiam diuidentem $\frac{2}{7}$. continet. Mirum ergo non est, in diuisione minutiarum semper produci Quotientem maiorem numero diuidendo, cum diuisor minor est, quàm 1. & quàm minutia diuidẽda, vt in dato exemplo patuit, idemque in diuisione 6. per $\frac{1}{2}$. apparet, vbi Quotiens est 12. Nam minutia diuidens $\frac{1}{2}$. duodecies in numero diuidendo 6. continetur.

Cur aliquando in diuisione minutiarum Quotiens maior sit minutia diuisa.

Quando Quotiens maior sit numero diuidando in minutijs

Quod

Quod tamen generalius, quando diuisor vnitate minor est licet non sit minor numero diuidendo, ita ostendemus. Nam cum Quotiens toties vnitatem contineat, quoties diuidendus diuisorem: erit talis proportio Quotientis ad vnitatem, qualis numeri diuidendi ad diuisorem, & permutando talis proportio Quotientis ad numerum diuidendum, qualis vnitatis ad diuisorem. Cum ergo vnitas ponatur maior diuisore, erit quoq; Quotiens maior numero diuidendo. Ita vides in diuisione $\frac{2}{5}$. per $\frac{3}{4}$. Quotientem $\frac{8}{15}$. maiorem esse minutia diuisa $\frac{2}{5}$. quia minutia diuidens $\frac{3}{4}$. minor est vnitate, licet maior sit, quam minutia diuisa.

Quando Quotiens in minutijs minor fit diuidendo numero.

Quando tamen diuisor maior est, quam 1. Quotiens semper minor erit numero diuidẽdo. Vt diuisis $\frac{8}{9}$. per $1\frac{1}{2}$. Quotiens est $\frac{16}{27}$. Et diuisis $6\frac{1}{2}$. per $1\frac{2}{3}$. Quotiens est $\frac{39}{10}$. id est $3\frac{9}{10}$. Diuisis rursus $100\frac{1}{2}$. per $10\frac{3}{4}$. Quotiens est $\frac{804}{86}$. hoc est, $9\frac{30}{86}$. siue $9\frac{15}{43}$. Sic etiã diuisis $\frac{2}{3}$. per $3\frac{1}{2}$ fiet Quotiens $\frac{4}{21}$. Denique diuisis $3\frac{1}{5}$. per $1\frac{1}{2}$. Quotiens erit $\frac{32}{15}$. hoc est, $2\frac{2}{15}$. vbi vides Quotientem semper minorem esse numero diuiso. Cuius rei ratio hæc est. Quoniam diuisio est inuentio numeri, qui toties vnitatem contineat, quoties numerus diuidendus continet diuisorem, vt cap. 5. dictum est, erit talis proportio Quotientis ad vnitatem, qualis numeri diuidendi ad diuisorem, & permutando talis proportio Quotientis ad numerum diuidendum, qualis vnitatis ad diuisorem. Cum ergo vnitas ponatur minor diuisore, erit etiã Quotiens minor numero diuidendo.

INSITIO FRACTORVM numerorum.

CAPVT XV.

SOlent Arithmetici nonnulli vti operatione quadam minutiarum, quam insitionem vocant. Est autem insitio minutiarũ nihil aliud, quàm propositis duabus, aut pluribus minutijs, quarum quælibet sit fractio vel vnius duntaxat particulæ omnium sequẽtium, vel fractio integrarum omnium fractionum sequentium, additio huiusmodi fractionum ad vltimam minutiam, respectu cuius omnes illæ fractiones fractionum sumuntur: ita vt quodammodo præcedentes fractiones sequentibus inserantur. Vnde nomen insitionis obtinuit operatio hęc minutiarum: quemadmodum in exemplis patebit. Vt propositis hisce duabus minutijs $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. ita vt prior sit fractio vel vnius tantum particulæ posterioris, vel fractio totius posterioris, hoc est, ita vt prior contineat vel duas partes tertias vnius quartæ partis, vel duas tertias trium quartarum: operatio, qua $\frac{2}{3}$. vnius quartæ, vel $\frac{2}{3}$. trium quartarum, ad $\frac{3}{4}$. adduntur, appellatur insitio. Eodem modo propositis quatuor hisce minutijs $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{2}{5}$. $\frac{4}{7}$. ita vt quælibet sit fractio vel vnius particulæ omnium sequentium, vel fractio totarum omnium sequentium, hoc est, ita vt vel prima contineat duas tertias vnius quartæ vnius quintæ vnius septimę, & secunda significet tres quartas vnius quintæ vnius septimæ, & tertia comprehendat duas quintas vnius septimæ; vel prima contineat

Insitio minutiarũ, quid.

duas

duas tertias trium quartarum duarum quintarum quatuor ſeptimarum,& ſecūda comprehendat tres quartas duarum quintarum quatuor ſeptimarum, & tertia ſignificet duas quintas quatuor ſeptimarum: operatio, qua omnes hæ fractiones fractionum, nimirum $\frac{2}{3}$. vnius quartæ vnius quintæ vnius ſeptimæ, & $\frac{3}{4}$. vnius quintæ vnius ſeptimæ, & $\frac{2}{5}$. vnius ſeptimæ; vel $\frac{2}{3}$. trium quartarum duarum quintarum quatuor ſeptimarum, & $\frac{3}{4}$. duarū quintarum quatuor ſeptimarum, & $\frac{2}{5}$. quatuor ſeptimarum, ad $\frac{4}{7}$. adduntur, inſitio dicitur. & ſic de alijs.

Inſitio duplex eſt.

Eſt ergo inſitio duplex: vna, quando quælibet minutia eſt fractio vnius duntaxat particulæ omnium ſequentium minutiarum; altera, quando quælibet minutia eſt fractio integrarum omnium minutiarum ſequentium, vt in exemplis patuit. Arithmetici omnes de prima ſolum inſitione locuti ſunt, nulla prorſus facta mentione inſitionis ſecundæ, eam fortaſſis ob cauſam, quòd prima vtilis ſit ad diuidendum quemcunque numerum integrū, vnà cum fractione aliqua per numerum integrum, vt paulo poſt dicemus. Quoniam vero ſecunda inſitio egregium quoque vſum habet in progreſsionib' Geometricis, vt, Deo iuuante, in maiore noſtro Arithmetices opere declarabimus; vtriuſque inſitionis regulam trademus.

Inſitio ꝓpter q̄d excogitata ſit.

Differentia inter inſitionē, & redu-

Magnum autem diſcrimen eſt inter inſitionem, & operationem illā qua cap. 9. minutias minutiarum ad ſimplicem minutiam reducere do-

re docuimus. Ibi enim propositis v. g. duabus hisce minutijs, $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. ita vt prior sit fractio posterioris, solum inquirebamus, quamnam minutiam simplicem constituerent duæ tertiæ trium quartarum, inueniebamusq; constituere $\frac{6}{12}$. id est, $\frac{1}{2}$. vnius integri; hic vero indagabimus, quænã minutia efficiatur, si addantur $\frac{2}{3}$. vnius quartæ, vel $\frac{2}{3}$. trium quartarum ad $\frac{3}{4}$. efficieturque priori modo minutia hæc, $\frac{11}{12}$. posteriori vero hæc, $\frac{15}{12}$. hoc est. $1\frac{1}{4}$. quarum vtraque longe abest à $\frac{1}{2}$. Eodem modo discrimen apparebit, si fuerint plures minutiæ, quã duæ. *ctionem minutiarum minutiarum*

Itaq; si proponantur duæ minutiæ, quarum prior sit fractio vnius tantum particulę posterioris, ita fiet insitio. Posterioris minutiæ numerator per denominatorẽ prioris multiplicetur, productoq; numero numerator eiusdẽ prioris adijciatur. Hoc .n. aggregatũ erit numerator minutiæ producendæ; denominator vero gignetur ex multiplicatiõe denominatorum inter se. vt datis hisce minutijs $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. ita fiet insitio, siue additio $\frac{2}{3}$. vnius quartę ad $\frac{3}{4}$. Ex 3. numeratore posterioris minutiæ in 3. denominatorẽ prioris fiunt 9. Addito numeratore 2. eiusdem prioris minutiæ, fiunt 11. pro numeratore minutiæ producẽdæ. Denominator autem erit numerus 12. ex multiplicatione denominatorum inter se productus: ita vt hæc minutia $\frac{11}{12}$. componatur ex additione $\frac{2}{3}$. vnius quartæ ad $\frac{3}{4}$. Quod facile probari potest ex regula additionis. Quoniam enim $\frac{2}{3}$. vnius quartæ, secundum reductionem minutiarum minutiarum, faciunt $\frac{2}{12}$. si addan-

Prima regula insitionis duarum minutiarum.

dantur $\frac{2}{12}$. ad $\frac{3}{4}$. fient $\frac{44}{48}$. hoc est, $\frac{11}{12}$. vt prius.

Quo modo plures minutiæ, quã duæ, inserãtur per primã regulam.

Si vero plures minutiæ, quàm duæ, dentur; ita vt quælibet sit fractio vnius tantum particulæ omnium sequentium, insitio hoc modo fiet. Multiplicetur numerator vltimæ minutiæ per denominatorem penultimæ, productoque numero addatur numerator eiusdem penultimæ; Deinde hoc aggregatum multiplicetur per denominatorem minutiæ antepenultimæ, productoque numero addatur eiusdem numerator; Post hæc aggregatum hoc multiplicetur per denominatorem proximè antecedentis minutiæ, productoque numero eiusdem numerator adijciatur; & sic deinceps, si plures fuerint minutiæ, aggregatum vltimum semper multiplicetur per denominatorem præcedentis minutiæ, eiusdemque numerator producto adijciatur, donec nulla minutia supersit. Postremum enim aggregatum erit numerator minutiæ producendæ: Denominator autem producetur ex multiplicatione denominatorum inter se, vt datis hisce minutijs $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{2}{5}$. $\frac{4}{7}$. ita fiet insitio, hoc est, additio $\frac{2}{3}$. vnius quartæ, vnius quintæ, vnius septimæ, & $\frac{2}{4}$. vnius quintæ, vnius septimæ, & $\frac{2}{5}$. vnius septimæ ad $\frac{4}{7}$. Ex 4. numeratore vltimæ minutiæ in 5. denominatorem penultimę fiunt 20. Addito numeratore 2. eiusdem penultimæ minutiæ, fiunt 22. quæ multiplicata per 4. denominatorem antepenultimæ minutiæ faciunt 88. Addito numeratore 3. eiusdem minutiæ antepenultimæ, fiunt 91. quæ multiplicata per 3. denominatorem antecedentis minutiæ & primæ, faciunt 273. Addito numeratore

ratore 2. eiusdem primæ minutiæ, quæ proximè antecedit, fiunt 275. pro numeratore minutiæ producendæ. Denominator autem erit numerus 420. productus ex multiplicatione denominatorum inter se, si nimirum primus per secundum multiplicetur, & hic numerus productus per tertium, &c. Itaque ex hac insitione orietur minutia hæc $\frac{275}{420}$. quæ ad minimos terminos reducta faciet $\frac{55}{84}$: Quod ex regula additionis probabitur hac ratione. Quoniam $\frac{2}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{7}$. per regulam reductionis minutiarum minutiarum faciunt $\frac{2}{420}$. & $\frac{3}{4}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{7}$. faciunt $\frac{3}{140}$. & $\frac{2}{5}$. $\frac{1}{7}$. faciunt $\frac{2}{35}$. si tres illæ minutiæ $\frac{2}{420}$. $\frac{3}{140}$. $\frac{2}{35}$. addantur ad $\frac{4}{7}$. fient $\frac{9432500}{14406000}$. hoc est in minimis terminis $\frac{55}{84}$. vt prius. sed multo facilius, & citius hæc summa inuenta est per insitionem.

Cæterum in hac regula insitionis nulla minutia reducenda est ad minimos terminos, antequam tota operatio absoluatur; quia sensus variaretur, & magnus fieret error: absoluta tamen operatione, reduci potest summa producta ad minimos terminos, vt à nobis factum est. Reduximus enim minutiam hanc $\frac{275}{420}$. ex insitione productam ad istam $\frac{55}{84}$. Quod autem sensus variaretur, & error contingeret, si minutia aliqua ante finem operationis ad terminos minimos reuocaretur, perspicuum est. Nam si inserendæ sint hæ minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{8}{12}$. id est, addendæ $\frac{2}{3}$. vnius duodecimæ ad $\frac{8}{12}$. fient $\frac{26}{36}$. At si posterior minutia $\frac{8}{12}$. reuocaretur ad minimos terminos, nempe ad hanc minutiam $\frac{2}{3}$. deberent inseri $\frac{2}{3}$. $\frac{2}{3}$. id est, addi $\frac{2}{3}$. vnius tertiæ ad $\frac{2}{3}$. qui sensus

Minutię inserēdæ iuxta primā regulā nō sūt reducēdæ ad minimos terminos ante finem operationis.

longe alius est, quã prior. Fietque propterea ex hac insitione alia minutia, nimirum $\frac{8}{9}$. valde diuersa à priori minutia producta $\frac{26}{36}$. Prior tamen minutia producta $\frac{26}{36}$. reduci potest ad hanc minimis terminis $\frac{13}{18}$.

Sũma insitiõis secundũ primã regulã semper minor est q̃ vnitas, & quare.

Prætereundum etiam non est, summam ex insitione hactenus exposita collectam, si vltima minutia minor est, quàm vnitas, semper minorem esse vnitate, etiamsi infinitæ minutiæ inserantur. Vt si hæ minutiæ $\frac{3}{4}$. $\frac{2}{3}$. $\frac{1}{2}$. $\frac{4}{5}$. inserantur, fiet minutia $\frac{119}{120}$. quæ minor est, quã vnitas. Quod ita debere esse, hac ratione declarari poterit. Quoniam vt $\frac{4}{5}$. efficiant vnitatem, deest $\frac{1}{5}$. & præcedens minutia $\frac{1}{2}$. quæ additur ad $\frac{4}{5}$. non est $\frac{1}{5}$. sed $\frac{1}{2}$. vnius quintæ, fit vt ad complendam vnitatem desit adhuc $\frac{1}{2}$. vnius quintæ: at quia antecedens minutia $\frac{2}{3}$. quæ additur, non est $\frac{1}{2}$. vnius quintæ, sed $\frac{2}{3}$. vnius dimidij vnius quintæ, fit, vt ad explendam vnitatem desit adhuc $\frac{1}{3}$. vnius dimidij vnius quintæ. Rursus quoniam præcedens minutia $\frac{3}{4}$. non est $\frac{1}{3}$. vnius dimidij vnius quintæ, sed $\frac{3}{4}$. vnius tertiæ vnius dimidij vnius quintæ, fit, vt ad conficiendam vnitatem desit adhuc $\frac{1}{4}$. vnius tertiæ vnius dimidij vnius quintæ, & sic deinceps, si plures fuerint minutiæ, semper aliquid deerit ad vnitatem complendam.

Vsus primæ regulæ insitiõis in diuidẽdo numero integro vnà

Vt autem videas, quàm præclarum vsum habeat prima hæc regula insitionis in diuidendo numero integro vnà cum minutia per numerum integrum, adducam vnum, vel alterum exemplum. Sint diuidenda 20 $\frac{1}{4}$. per 12.

Diuisis

Diuisis integris 20. per 12. fit Quotiens 1 $\frac{8}{12}$. Et quia minutia $\frac{1}{4}$. diuidi etiam debet per 12. & Quotiens addi priori quotienti; est autem Quotiens (si diuidatur $\frac{1}{4}$. per 12.) $\frac{1}{4}$. vnius duodecimæ, quemadmodum si 1. diuidatur per 12. Quotiens est $\frac{1}{12}$. fit, vt si inserantur hæ minutiæ $\frac{1}{4}$. $\frac{8}{12}$. id est, si addatur $\frac{1}{4}$. vnius duodecimæ, (nimirum Quotiens diuisionis $\frac{1}{4}$. per 12) ad $\frac{8}{12}$. componatur minutia, quæ addita Quotienti integro 1. efficiat totum Quotientem: Fit autem ex insitione harum minutiarum $\frac{1}{4}$. $\frac{8}{12}$. minutia $\frac{33}{48}$. hoc est $\frac{11}{16}$. Igitur totus Quotiens erit 1 $\frac{11}{16}$. Idem efficies, si diuisorem 12. numero integro diuidendo 20. supponas, vt fiat minutia $\frac{20}{12}$. & huic minutię inseras minutiam $\frac{1}{4}$. diuidendam hoc modo. $\frac{1}{4}$. $\frac{20}{12}$. quia minutia $\frac{20}{12}$. est Quotiens diuisionis 20. per 12. cui per insitionem additur $\frac{1}{4}$. vnius duodecimæ, nempe Quotiens diuisionis $\frac{1}{4}$. per 12. Vtroque autem modo recte fieri diuisionem facile experieris per regulam diuisionis. Si enim diuidas 20 $\frac{1}{4}$. per 12. reperies quotientem $\frac{81}{48}$. id est, 1 $\frac{33}{48}$. siue 1 $\frac{11}{16}$. vt prius. cum minutia per numerũ integrũ.

Sint rursus diuidenda 100. $\frac{5}{8}$ per 8. Diuisis integris 100. per 8. fit Quotiens 12 $\frac{4}{8}$. Et quia minutia $\frac{5}{8}$. diuidi etiam debet per 8. & Quotiens addi priori Quotienti; est autem (si diuidantur $\frac{5}{8}$. per 8.) Quotiens $\frac{5}{8}$. vnus octauæ, quemadmodum si 1. diuidatur per 8. Quotiens est $\frac{1}{8}$. fit, vt si inserantur hæ minutiæ $\frac{5}{8}$. $\frac{4}{8}$. id est, si addantur $\frac{5}{8}$. vnius octauæ, (nimirum Quotiens diuisionis $\frac{5}{8}$. per 8.) ad $\frac{4}{8}$ conficiatur minutia, quæ addita Quotienti integro 12. componat totũ Quotientẽ: Fit autem ex insitione

harum minutiarum $\frac{5}{6}$. $\frac{4}{8}$. minutia $\frac{29}{48}$. Totus igitur Quotiens erit $12\frac{29}{48}$. Idem efficies, si diuisorem 8. numero integro diuidendo 100. supponas, vt fiat minutia $\frac{100}{8}$. & huic minutiæ inseras minutiam $\frac{5}{6}$. diuidendam, hoc modo. $\frac{5}{6}$. $\frac{100}{8}$. quia minutia $\frac{100}{8}$. est Quotiens diuisionis 100. per 8. cui per insitionẽ adduntur $\frac{5}{6}$. vnius octauę, nempe Quotiens diuisionis $\frac{5}{6}$. per 8. eundem prorsus Quotientem $12\frac{29}{48}$. inuenies, si diuidas per regulam diuisionis, 100. $\frac{5}{6}$. per 8. Facies enim quotientem $\frac{605}{48}$. hoc est, $12\frac{29}{48}$. Postremo sint diuidenda 100 $\frac{5}{6}$. per 10. Diuisis integris 100. per 10. fit Quotiens 10. nihilque remanet. Et quia minutia $\frac{5}{6}$. diuidi etiam debet per 10. & Quotiens addi priori Quotienti; est autem (diuisis $\frac{5}{6}$. per 10.) Quotiens $\frac{5}{6}$. vnius decimæ, quemadmodum si 1. diuidatur per 10. Quotiens est $\frac{1}{10}$. fit, vt si inserantur hæ minutiæ $\frac{5}{6}$. $\frac{0}{10}$. id est, si addantur $\frac{5}{6}$. vnius decimæ (nimirum Quotiens diuisionis $\frac{5}{6}$. per 10.) ad $\frac{0}{10}$. (quia enim nulla fractio superfuit in diuisione 100. per 10. ponenda est figura 0. supra diuisorem 10. vt fiat minutia $\frac{0}{10}$. continens nullam decimam.) confletur minutia, quæ addita Quotienti integro 10. componat totum Quotientem: Fit autem ex insitione harum minutiarũ $\frac{5}{6}$. $\frac{0}{10}$. minutia $\frac{5}{60}$. Totus ergo Quotiens erit $10\frac{5}{60}$ hoc est, $10\frac{1}{12}$. Idem efficies, si diuisorem 10. numero integro diuidẽdo 100. supponas, vt fiat minutia $\frac{100}{10}$. & huic minutiæ inseras minutiam $\frac{5}{6}$. diuidendã, hoc modo. $\frac{5}{6}$. $\frac{100}{10}$. quia minutia $\frac{100}{10}$. est Quotiens diuisionis 100. per 10. cui per insitionẽ adduntur $\frac{5}{6}$. vnius decimæ, nẽpe Quotiẽs diuisionis $\frac{5}{6}$. per

$\frac{5}{6}$. per 100. Eundem omnino Quotientem habebis, si 100 $\frac{5}{6}$. diuidas per 10. secũdum diuisionis regulam. Fiet enim Quotiens $\frac{605}{60}$. hoc est, 10 $\frac{5}{60}$. siue 10 $\frac{1}{12}$.

Iam vero si proponantur duę minutię, quarum prior sit fractio totius posterioris, fiet insitio hac ratione. Multiplicetur posterioris minutiæ numerator per denominatorẽ prioris, productoque numero addatur numerus ex multiplicatione numeratorum productus. Fiet enim hac ratione numerator minutiæ producendæ. Denominator vero procreabitur ex multiplicatione denominatorum inter se. Vt hisce minutijs $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. datis, ita fiet insitio, siue additio $\frac{2}{3}$. trium quartarum ad $\frac{3}{4}$. Ex 3. numeratore posterioris minutiæ in 3. denominatorem prioris fiunt 9. Addito numero 6. ex multiplicatione numeratorũ producto, fiunt 15. pro numeratore minutiæ producendæ. Denominator autem erit numerus 12. ex multiplicatione denominatorum productus. Itaque ex additione $\frac{2}{3}$. trium quartarum ad $\frac{3}{4}$. conflatur minutia $\frac{15}{12}$. hoc est, 1 $\frac{1}{4}$. Quod facile probari potest ex regula additionis. Quoniam enim $\frac{2}{3}$. trium quartarum faciunt $\frac{6}{12}$. vt patet ex reductione, quam de minutijs minutiarum tradidimus; si addantur, $\frac{6}{12}$. ad $\frac{3}{4}$. fient $\frac{60}{48}$. hoc est, 1 $\frac{1}{4}$. vt prius.

Secũda regula insitionis duarum minutiarum.

Si vero plures minutiæ, quàm duę, sint propositæ, ita vt quælibet sit fractio integrarum minutiarum omnium sequentium, facienda erit insitio hoc modo. Multiplicetur numerator vltimæ minutiæ per denominatorem penul-

Quo pacto plures minutiæ, quã duæ, inserãtur per secundã regulam.

penultimę, productoque numero addatur numerus ex multiplicatione duorum numeratorum postremorum productus; Deinde hoc aggregatum multiplicetur per denominatorem minutiæ antepénultimæ, productoque numero addatur numerus ex tribus postremis numeratoribus inter se multiplicatis product⁹: Rursus aggregatum hoc multiplicetur per denominatorem proxime antecedētis minutię, productoque numero adijciatur numerus ex quatuor vltimis numeratoribus inter se multiplicatis productus; & sic deinceps, si plures fuerint minutiæ, aggregatum vltimum semper multiplicetur per denominatorem præcedentis minutiæ, productoque numero adijciatur numerus productus ex omnibus numeratoribus illarum minutiarum, quæ vsque ad eum locum assumptæ fuerunt, donec nulla minutia supersit. Postremum enim aggregatum erit numerator minutiæ producēdæ: Denominator autem procreabitur ex multiplicatione denominatorum inter se. Vt propositis hisce minutijs $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{2}{5}$. $\frac{4}{7}$. ita fiet insitio, siue additio $\frac{2}{3}$. trium quartarum duarum quintarum quatuor septimarum, & $\frac{3}{4}$. duarum quintarum quatuor septimarum, & $\frac{2}{5}$. quatuor septimarum, ad $\frac{4}{7}$. Ex 4. numeratore vltimæ minutiæ in 5. denominatorem penultimæ fiunt 20. Addito numero 8. producto ex postremis duobus numeratoribus 4. & 2. inter se multiplicatis, fiunt 28. quæ multiplicata per 4. denominatorem antepenultimæ minutiæ, faciunt 112. Addito numero 24. producto ex postremis tribus numeratoribus

4. 2.

4. 2. & 3. inter se multiplicatis, fiunt 136. quæ multiplicata per 3. denominatorem antecedentis minutiæ, quæ prima est, faciunt 408. Addito numero 48. producto ex omnibus quatuor numeratoribus 4. 2. 3. & 2. inter se multiplicatis, fiunt 456. pro numeratore minutiæ producendæ: Denominator vero erit numerus 420. productus ex denominatoribus omnibus inter se multiplicatis. Itaque ex insitione hac generabitur hæc minutia, $\frac{456}{420}$. hoc est, $1\frac{36}{420}$. siue in minimis terminis $1\frac{3}{35}$. Quod ex regula additionis confirmabitur hoc modo. Quoniam $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{2}{5}$. $\frac{4}{7}$. per regulam qua minutiæ minutiarum reducuntur, faciunt $\frac{48}{420}$. & $\frac{3}{4}$. $\frac{2}{5}$. $\frac{4}{7}$. faciunt $\frac{24}{140}$. & $\frac{2}{5}$. $\frac{4}{7}$ faciunt $\frac{8}{35}$. si tres hę minutiæ $\frac{48}{420}$. $\frac{24}{140}$. $\frac{8}{35}$. addantur ad $\frac{4}{7}$. fiet minutia $\frac{15640800}{14406000}$. hoc est $1\frac{1234800}{14406000}$. siue $1\frac{3}{35}$. in minimis terminis, vt prius, Sed multo facilius, & expeditius eandem summam per insitionem collegimus.

In hac porro secunda regula insitionis possunt minutiæ inserendæ reduci ad minimos terminos ante operationem. Nam si inserantur hæ minutię $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{8}$. id est, si addātur $\frac{2}{3}$. quatuor octauarum ad $\frac{4}{8}$. fient $\frac{20}{24}$. hoc est, $\frac{5}{6}$. Tantundē faciemus, si prius $\frac{4}{8}$. reducamus ad $\frac{1}{2}$. & inseramus postea $\frac{2}{3}$. $\frac{1}{2}$. hoc est, addamus $\frac{2}{3}$. vnius dimidij ad $\frac{1}{2}$. Eodem modo si inserantur $\frac{6}{10}$. $\frac{4}{8}$. fient $\frac{64}{80}$. id est, $\frac{4}{5}$. eademque minutia producetur, si prius $\frac{6}{10}$. reducatur ad $\frac{3}{5}$. & $\frac{4}{8}$. ad $\frac{1}{2}$. inseranturque $\frac{3}{5}$. $\frac{1}{2}$. Producentur enim ex hac insitione $\frac{8}{10}$. hoc est, $\frac{4}{5}$. vt prius. Ratio huius rei est, quia cum pręcedens minutia sit fractio totius sequentis, idem erit omnino valor $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{8}$.

& $\frac{2}{3}$. $\frac{1}{2}$. Si enim hæ minutiæ minutiarum reducãtur ad ſimplices minutias, reducetur prior ad $\frac{4}{12}$. hoc eſt, ad $\frac{1}{3}$. poſterior vero ad $\frac{2}{6}$. id eſt, ad $\frac{1}{3}$. quoque: Quod in priori regula non cõtingit. Cum enim ibi prior minutia ſit fractio vnius tantũ particulæ poſterioris, perſpicuum eſt in eodem exemplo aliud eſſe $\frac{2}{3}$. $\frac{1}{8}$. & $\frac{2}{3}$. $\frac{1}{2}$. Prior enim minutia minutiarũ facit $\frac{2}{24}$. hoc eſt $\frac{1}{12}$. poſterior vero $\frac{2}{6}$. id eſt, $\frac{1}{3}$.

QVAESTIVNCVLAE NONNVLLAE numerorum integrorum, ac minutiarum.

CAPVT XVI.

OPeræpretium me facturum arbitror, ſi priuſquam ad alia pergam, ſubnectam hoc loco varias quæſtiunculas numerorum integrorum, ac minutiarum, quæ per additionem, ſubtractionem, multiplicationem, diuiſionemque ſoluuntur, tum quia in ijs ſoluendis ſtudioſi ſeſe exercere poſſunt in operationibus integrorum, & minutiarum, tum etiam, quia ſæpenumero ſimiles quæſtiones præclarum vſum habent in alijs rebus Arithmeticis. Hinc ergo exordiemur.

Inuentio numeri, à quo facta eſt ſubtractio, vel facienda vt propoſitus numerus relinquatur.

1. A Quo numero ſubducta ſunt, vel ſubduci debent 23. vt remaneant 47? Item à quo numero ſubducta ſunt, vel ſubduci debent $\frac{4}{11}$. vt relinquãtur $8\frac{2}{3}$? Huiuſmodi quęſtiones ſoluuntur per additionẽ. Si enim numerũ ſubtractum, ſubtrahendumve adijcias numero, qui relinqui debet, conficies numerum, à quo datus

datūs numerus ſubtractus relinquet datum numerum. Vt in priori quæſtione, ex 23. & 47. fit numer⁹ 70. Ab hoc ergo ſubducēda ſunt 23. vt 47. relinquantur. In poſteriori autē quæſtione, ex $\frac{4}{11}$. & $8\frac{2}{3}$. fit numerus $9\frac{1}{33}$. à quo ſi ducas $\frac{4}{11}$. relinquentur $8\frac{2}{3}$. vt patet, ſi reducas minutias productas ad integra, & ad minimos terminos. Id quod in ſequentibus quæſtionibus obſeruandum etiam erit hoc eſt, poſt abſolutam operationem reducendæ erunt minutiæ productæ ad minimos terminos, vt in hac quæſtione factum eſt.

2. Quis numerus ſubtractus eſt, aut ſubtrahi debet ex 87. vt relinquantur 26? Item qui numerus ablatus eſt, vel auferri debet ex $\frac{8}{13}$. vt relinquantur $\frac{2}{7}$? Huius generis quæſtiones expediet ſubtractio. Nam ſi numerus, qui relinqui debet, ſubducatur ex numero, à quo fieri debet ſubtractio, remanebit numerus, qui ex eodem numero detractus relinquet reſiduum propoſitum. Vt in priori quæſtione, ſubtractis 26. ex 87. remanent 61. Si igitur tollantur 61. ex 87. remanebunt 26. In poſteriori autem quæſtione, ſi auferantur $\frac{2}{7}$. ex $\frac{8}{13}$. reſtabunt $\frac{30}{91}$. quæ ſi ſubtrahantur ex $\frac{8}{13}$ relinquentur $\frac{2}{7}$.

Inuentio numeri ſubtracti, vel ſubtrahendi ex Propoſito numero vt alius datus numerus ſit reliquus.

3. Cui numero adijcienda ſunt 38. aut quis numerus adijciendus eſt ad 38. vt numerus cōpoſitus ſit 83? Item cui numero addenda ſunt $4\frac{8}{9}$. aut quis numerus adijciendus eſt ad $4\frac{8}{9}$. vt componatur numerus $20\frac{1}{2}$? Quæſtiones eiuſmodi per ſubtractionem etiam ſoluuntur. Nam ſi ex numero, qui componi debet, demas numerum addendum propoſitum, re-

Inuentio numeri. cui datus numerus adijciendus ſit, vel qui dato numero ſit addēdus, vt alius numerus dat⁹ fiat.

linquetur numerus, cui si adijciatur datus numerus addendus, fiet numerus datus. Vt in priori quæstione, subductis 38. ex 83. remanent 45. Huic ergo numero adijcienda sunt 38. vt fiat numerus 83. In posteriori autē quæstione, subtractis $4\frac{5}{8}$. ex $20\frac{1}{2}$. relinquitur numerus $15\frac{7}{8}$. cui si addas $4\frac{5}{8}$. fiet numerus $20\frac{1}{2}$.

Inuentio differentiæ inter duos datos numeros.

4. Quæ differentia, siue excessus est inter 100. & 349? Item inter $6\frac{1}{2}$. & $20\frac{3}{4}$? Hæ etiam quæstiones per subtractionem explicantur. Si nanque minor numerus ex maiore tollatur, relinquetur differentia, siue excessus quæsitus. Vt in priori quæstione, sublatis 100. ex 349. relinquuntur 249. pro excessu, differentiave inter 100. & 349. In posteriori autem quæstione, demptis $6\frac{1}{2}$. ex $20\frac{3}{4}$. restant $14\frac{1}{4}$. Hoc ergo numero superat numerus $20\frac{3}{4}$. numerum $6\frac{1}{2}$.

Inuentio numeri, diuisi, aut diuidēdi per datum numerū vt Quotiēs propositus proueniat.

5. Quis numerus diuisus, vel diuidendus est per 9. vt quotiens sit 34? Item quis numerus diuisus vel diuidendus est per $4\frac{1}{3}$. vt Quotiens sit $\frac{1}{2}$? Tales quæstiones per multiplicationem expediuntur. Si enim diuisor datus per datum Quotientem multiplicetur, procreabitur numerus diuisus diuidendusve, qui quæritur. Vt in priori quæstione, multiplicatis 9. per 34. fit numerus 306. quo diuiso per 9. Quotiens erit 34. In quæstione vero posteriori, si multiplicentur $4\frac{1}{3}$ per $\frac{1}{2}$. producetur numerus $2\frac{1}{6}$. qui diuisus per $4\frac{1}{3}$. dabit Quotientem $\frac{1}{2}$.

Inuentio numeri, qui contineat,

6. Quis numerus continet $\frac{3}{5}$. huius numeri 30? Item quis numerus est, vel dat $\frac{1}{2}$. huius numeri $4\frac{5}{7}$? Multiplicatio etiam huiusmodi

quæ-

quæstiones absoluit. Si enim dati duo numeri inter se multiplicentur, gignetur numerus quæsitus. Vt quoniam in priori quæstione ex multiplicatione $\frac{3}{5}$. per 30. producuntur 18. fit vt numerus 18. contineat $\frac{3}{5}$. numeri 30. In posteriori autem quæstione, ex multiplicatione $\frac{1}{2}$. per $4\frac{5}{7}$. fit numerus $2\frac{5}{14}$. qui facit $\frac{1}{2}$. huius numeri $4\frac{5}{7}$. Hæc quæstio ita quoque proponi potest. Da mihi $\frac{3}{5}$. huius numeri 30. Item da mihi $\frac{1}{2}$. huius numeri $4\frac{5}{7}$.

vel sit, aut det datã fractionem, seu partẽ, partesve propositi numeri.

7. Per quem numerum diuisa, aut diuidenda sunt 48. vt Quotiens sit 10? Item per quem numerum diuidentur $\frac{3}{7}$. vt Quotiens sit $\frac{2}{3}$? Diuisione similibus quæstionibus satisfiet. Nam si numerus diuisus, diuidendusve propositus diuidatur per datum Quotientem, prodibit ex hac diuisione diuisor quæsitus. Vt in priori quæstione, diuisis 48. per 10. fiet Quotiens $4\frac{4}{5}$. per quem si diuidatur numerus datus 48. fiet Quotiens 10. In posteriori autẽ quæstione, diuisis $\frac{3}{7}$. per $\frac{2}{3}$. fit Quotiens $\frac{9}{14}$. per quem si diuidantur $\frac{3}{7}$. producetur Quotiens $\frac{2}{3}$.

Inuentio numeri, per quẽ datus numerus sit diuisus aut diuidendus, vt Quotiens sit propositus numerus.

8. Per quem numerum multiplicãda sunt 17. aut quis numerus multiplicandus est per 17. vt productus numerus sit 100? Item per quẽ numerum multiplicari debent $3\frac{1}{2}$. aut quis numerus per $3\frac{1}{2}$. multiplicari debet, vt numerus productus sit $\frac{3}{4}$? Diuisio quoque similibus quæstionibus satisfaciet. Nã si numerũ, qui produci debet, partiamur per numerũ qui multiplicandus proponitur, efficiemus numerum quæsitum. Vt in quæstione priori, diuisis

Inuentio numeri per quem datus numerus sit multiplicãdus, vel qui per datũ numerũ multiplicãdus sit, vt gignatur numerus propositus.

diuisis 100. per 17. fit Quotiens $5\frac{5}{17}$. per quem si multiplicetur datus numerus 17. procreabitur datur numerus 100. In posteriori vero quæstione, si diuidatur $\frac{1}{4}$. per $3\frac{1}{2}$. fiet Quotiens $\frac{1}{14}$. per quem si multiplicetur datus numerus $3\frac{1}{2}$. gignetur datus numerus $\frac{1}{4}$.

Inuentio duorum numerorum, qui inter se multiplicati datum numerum producāt.

9. Qui duo numeri inter se multiplicati producunt 48. vel $\frac{1}{2}$. vel $6\frac{3}{4}$? Diuisio quoque huiusmodi quæstionibus satisfaciet. Nam si numerum producendum diuidamus per quẽuis numerum, erit hic numerus, & Quotiens duo illi, qui quæruntur. Vt si 48. diuidantur per quemcunq; numerum, vt per 6. fiet Quotiens 8. Duo ergo numeri 6. & 8. inter se multiplicati producent 48. Sic etiam si eadem 48. diuidantur per alium numerum quemcunque, vt per 10. fiet Quotiens $4\frac{4}{5}$. Duo ergo hi numeri 10. & $4\frac{4}{5}$. inter se multiplicati gignent hunc numerum 48. Item si partiamur $\frac{1}{2}$. per quemcunque numerum, vt per $\frac{2}{3}$. inueniemus Quotientem $\frac{3}{4}$. Duo ergo numeri quæsiti, qui inter se multiplicati faciant $\frac{1}{2}$. erunt $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{4}$. Eadem ratione si partiamur $\frac{1}{2}$. per quemuis alium numerum, vt per 8. reperiemus Quotientem $\frac{1}{16}$. Duo igitur numeri quæsiti, qui inter se multiplicati faciant $\frac{1}{2}$. erunt 8. & $\frac{1}{16}$. Denique diuisis $6\frac{3}{4}$. per quemlibet numerum, vt per $3\frac{1}{2}$. fiet Quotiens $1\frac{13}{14}$. Duo ergo numeri, qui inter se multiplicati producant $6\frac{3}{4}$. erunt $3\frac{1}{2}$. & $1\frac{13}{14}$.

Inuentio duorum numerorū, vt vno per alterum

10. Qui sunt duo illi numeri, vt vno diuiso per alterum, Quotiens sit 28? Item qui sunt duo illi numeri, vt vno diuiso per alterum, Quotiens sit $\frac{5}{6}$? Has quæstiones, & alias simi-

les

les multiplicatio enodat. Si nanq; Quotientem datum multiplices per quenuis numerũ, dabit numerus productus numerum diuidẽdum: diuisor autem erit numerus multiplicans assumptus. Vt in priori quæstione, si 28. multiplices per quenuis numerum, vt per 6. efficies numerum 168. Hic ergo diuisus per 6. faciet 28. In quæstione autem posteriori, si $\frac{5}{6}$. multiplices per quemlibet numerum, vt per $\frac{1}{2}$. procreabis $\frac{5}{12}$. quibus diuisis per $\frac{1}{2}$. Quotiens erit $\frac{5}{6}$.

diuiso, proueniat Quotiens propositus.

11. Per quem numerum multiplicanda sunt 7. aut quis numerus multiplicandus est per 7. vt producto numero diuiso per 8. Quotiens sit 3? Item per quem numerum multiplicari debent $\frac{2}{7}$. Aut quis numerus per $\frac{2}{7}$. multiplicandus est, vt producto numero per $\frac{3}{4}$. diuiso, Quotiens sit $\frac{1}{4}$? Quæstiones huiusmodi multiplicatione, & diuisione soluuntur. Nã si diuisorem datum per datum Quotientem multiplices, numerumque productum per datum numerum multiplicandum, multiplicantemve partiaris, erit Quotiens numerus, qui quæritur. Vt in priori quæstione, si multiplicetur diuisor datus 8. per datum Quotientem 3. producetur numerus 24. qui diuisus per numerum multiplicandum, multiplicantemve datum, nempe per 7. faciet $3\frac{3}{7}$. numerum quæsitũ. Si enim multiplicentur 7. per $3\frac{3}{7}$. fiet numerus 24. qui diuisus per 8. faciet Quotientem 3. In posteriori vero quæstione, si diuisor datus $\frac{3}{4}$. multiplicetur per datũ Quotientem $\frac{1}{4}$. fiet numerus $\frac{3}{16}$. qui diuisus per $\frac{2}{7}$. numerum multiplicantem, multiplicandũve

Inuentio numeri, per quẽ datus numerus sit multiplicãdus vel qui multiplicandus sit p datum numerũ, vt producto diuiso per aliũ datũ numerũ, proueniat Quotiens propositus.

datum

datum faciet $\frac{15}{32}$. numerum quæsitum. Si namque $\frac{2}{5}$. multiplicentur per $\frac{15}{32}$. fiet numerus $\frac{3}{16}$. qui diuisus per $\frac{3}{4}$. faciet Quotientem $\frac{1}{4}$.

Inuentio partis quā datus numerus exhibet respectu alterius numeri dati.

12. Quota pars est numerus 6. huius numeri 54? Item quota pars est hic numerus $\frac{3}{5}$. huius numeri $\frac{9}{10}$? Quæstiones tales per diuisionem explicantur. Nam si numerus datus, qui debet esse pars per alterum datum numerum (qui semper maior esse debet altero) diuidatur, indicabit Quotiens, quota pars, aut partes sit numerus datus numeri dati. Vt in priori quæstione, diuisis 6. per 54. fit Quotiens $\frac{6}{54}$. id est $\frac{1}{9}$. Erit ergo numerus 6. vna nona pars numeri 54. In posteriori autē quæstione, diuisis $\frac{3}{5}$. per $\frac{9}{10}$. fit Quotiens $\frac{30}{45}$. hoc est, $\frac{2}{3}$. Continebit ergo numerus $\frac{3}{5}$. duas tertias partes numeri $\frac{9}{10}$. Hoc autē ita esse experiri licebit per sextam quæstionem. Si enim quæratur numerus, iuxta illam quæstionem, qui sit $\frac{1}{9}$. numeri 54. reperietur numerus 6. Si item inuestigetur, qui numerus contineat $\frac{2}{3}$. numeri $\frac{9}{10}$. inuenietur numerus $\frac{18}{30}$. hoc est, $\frac{3}{5}$.

Inuentio numeri, respectu cuius datus numerus exhibeat partē propositam.

13. .Numerus hic 6. cuius numeri erit vna nona pars? Item numerus $\frac{3}{5}$. cuius numeri duas tertias continebit? Diuisio quæstiones tales soluit. Si namque datus numerus diuidatur per minutiam, quæ significet propositam partem, partesve, dabit Quotiens numerum quæsitum. Vt in quæstione priori, diuisis 6. per $\frac{1}{9}$. fit Quotiens 54. Numerus ergo 6. nona pars erit numeri 54. In quæstione vero posteriori, diuisis $\frac{3}{5}$. per $\frac{2}{3}$. fit Quotiens $\frac{9}{10}$. Huius er-

ius ergo numeri duas tertias continebit hic numerus $\frac{2}{3}$.

14. Hic numerus 7. quot octauas partes vnius integri comprehendit? Item numerus hic $\frac{3}{4}$. quot duodecimas partes vnius integri continet? Item hic $\frac{3}{7}$. quot octauas vnius integri complectitur? Multiplicatio huius generis quæstiones dirimet. Si enim datus numerus per denominatorẽ partium, quæ quæruntur, multiplicetur, dabit productus numerus numerum partium quæsitum. Vt in prima quæstione, multiplicatis 7. per 8. fiunt 56. Numerus ergo 7. continebit 56. octauas. In secunda autem quæstione, multiplicatis $\frac{3}{4}$. per 12. fiunt 9. Numerus ergo $\frac{3}{4}$. complectitur nouem duodecimas. In tertia denique quæstione, multiplicatis $\frac{3}{7}$. per 8. fit numerus $\frac{24}{7}$. hoc est, $3\frac{3}{7}$. Numerus ergo $\frac{3}{7}$. continet tres octauas, & $\frac{3}{7}$. vnius octauæ. Atque hoc ita esse, perspicuum est. Si enim $\frac{3}{7}$. $\frac{1}{8}$. hoc est, $\frac{3}{56}$. & $\frac{3}{8}$. in vnam summam colligantur, deprehendentur $\frac{3}{7}$. Ex quo fit, $\frac{3}{7}$. continere $\frac{3}{8}$. & $\frac{3}{7}$. $\frac{1}{8}$.

Inuentio multitudinis partium quarumcunque, quas datus numerus cõtinet.

REGVLA TRIVM, QVAE ALIO NOMINE REGVLA AVREA, SIVE REgula *proportionum dici solet.*

CAP. XVII.

HActenus iacta sunt à nobis necessaria Arithmetices fundamenta; sequuntur iam

iam variæ regulæ, in quibus mirificus eorum vſus apparet, non ſolum Mathematicis, verum etiam mercatoribus, immo vero & cuilibet priuato homini, ſi in commercijs, conuentiſque mutuis non vult decipi, aut decipere (quorum illud turpe, hoc vero etiam iniquum foret) maximè vtiles, ac neceſſariæ. Primo autem loco ſeſe offert regula illa nunquam ſatis laudata, quæ ob immenſam vtilitatem, Aurea dici ſolet, vel regula proportionum, propterea quod in quatuor numeris proportionalibus, quorum priores tres noti ſunt, quartus autem ignotus quæritur, verſetur; vnde & regula trium apud vulgus appellata eſt: quòd tres numeros ponat cognitos, & ex ijs quartum ignotum eliciat. Ita autem regula hæc proportionum ſe habet.

Regula aurea, ſiue proportionum, aut regula trium, cur ſic dicta ſit.

Numeri in regula triũ quo pacto ſint collocãdi.

Diſpoſitis tribus numeris notis, ita vt is, qui quæſtionem habet annexam, (Semper enim vnus illorum quæſtionem ſecum affert, vt in exemplis apparebit) tertio ſtatuatur loco; reliquorum autem ille, qui de eadem eſt re, hoc eſt, qui tertio ſimilis eſt, (Exempla autem declarabunt, in quo ſimilitudo hęc cõſiſtat.) primum occupet locum, mediam denique ſedem teneat alter, cui quartus, qui quæritur, ſimilis eſſe debet: Diſpoſitis, inquam, hoc modo numeris, multiplicentur tertius, & medius inter ſe, productuſque numerus per primum diuidatur. Nam quotiens numerus, erit quartus, qui quærebatur, ſatisfacietque quæſtioni propoſitæ: hoc eſt, tertius numerus ad eum habebit eandem proportionem, quam primus ad ſecundum.

Quo pacto per regulam trium quartus numerus ignotus ſit inquirendus.

Exem-

Exemplum.

Quatuor aureis emuntur 12. libræ piperis, quęritur, quot librę emi possint aureis 20. Hic vides, 20. aureos habere annexam quæstionem: de illis enim quæritur, quotnam libras exhibere possint: Huic numero similis est numerus 4. aureorum. Nam sicut 4. aureis emptæ sunt 12. libræ, ita 20. aureis emendæ sunt aliæ libræ, ita vt vterque numerus sit pretium: at 12. libræ piperis sunt merces. Ita ergo stabit exemplum.

Aurei.	Lib.	Aurei.		Lib.
4.	12.	20?	fiunt	60.

Multiplicando autem inter se secundum, & tertium numerum, & productum 240. per primum diuidendo, inueniemus libras 60. pro quarto numero, qui quærebatur. Vbi vides, quemadmodum primus numerus 4. tertia pars est secundi numeri 12. ita numerum tertium 20. tertiam partem esse quarti numeri inuenti 60.

Aliud exemplum.

Aureos 60. expendo 5. mensibus, peto, 132. aureos quot mensibus expendam? Hic etiam cernis, quæstionem fieri de 132. aureis, & huic numero similem esse hunc 60. aur. Sic igitur exemplum stabit.

Aurei.	Menses.	Aurei.		Menses.
60.	5.	132?	fiunt	11.

Multiplicando autem secundum numerum,

 & tertium

& tertium inter se, productumque 660. diuidendo per primum, reperiemus 11. menses, quibus expendam 132. aureos. Vbi etiam vides, tertium numerum 132. duodecies continere quartum inuentum 11. quemadmodum primus 60. secundum 5. complectitur duodecies.

Demonstratio regulæ trium.

Demonstratio huius regulæ hæc est. Quoniam eadem proportio esse debet primi numeri ad secundum, quæ tertij ad quartum inuentum, vt dictum est, & ex propositis exemplis constat; necesse est, ex propos. 19. lib. 7. Eucl. eundem numerũ produci ex multiplicatione primi numeri per quartum, qui ex secundo in tertium gignitur. Cum igitur numerus ex secundo in tertium productus diuidatur per primum, vt quartus inueniatur, vt regula trium præcipit; fit vt primus numerus per Quotientem, hoc est, per quartum numerum inuentum multiplicatus producat eundem numerum diuisum, qui nimirũ ex secundo in tertium fuit procreatus. Nã numero quolibet per alium quemuis numerũ diuiso, si diuisor per Quotientem multiplicetur, necessario numerus diuisus rursus procreatur, vt in tertio examine Diuisionis integrorũ cap. 5. dictum est. Id quod etiam constat ex definitionibus Diuisionis, ac Multiplicationis: quod hoc exemplo proposito declarabimus. Numer' 12. diuidatur per 4. vt fiat Quotiens 3 qui nimirum, secundum definitionẽ diuisionis cap. 5. traditã, toties vnitatem cõtineat, quoties diuisus numerus 12. diuisorẽ 4. continet. Dico si multiplicemus diuisorem

Numero per aliũ diuiso si diuisor per Quotientem multiplicetur, cur rursum numerus diuisus producatur.

4. per

4. per Quotientem 3. necessario rursus produci diuisum numerum 12. Nam cum, iuxta definitionem Multiplicationis cap. 4. traditam, numerus procreari debeat, qui toties cõtineat diuisorem 4. qui est vnus numerorum multiplicantium, quoties numerus quotiens 3. qui est alter numerus multiplicans, vnitatẽ continet; contineat autẽ diuisus numerus 12. toties diuisorem 4. quoties numerus Quotiẽs 3. vnitatem includit, vt dictũ est; liquido cõstat, numerum diuisum 12. ex dicta multiplicatione diuisoris 4. per Quotiẽtem 3. procreari. Eademq; ratio est in omnibus alijs numeris. Quæ cum ita sint, erit omnino numerus Quotiens per regulam trium inuentus, quartus numerus proportionalis, qui quæritur, vt ex dicta propos. 19. lib. 7. Eucl. constat: quãdoquidem idem numerus producitur ex primo numero in quartum, qui ex secundo in tertiũ, vt diximus.

Ex his, quæ proxime scripsimus, facile colligitur, qua ratione regula trium possit examinari. Nam si idem procreetur numerus ex primo numero in quartum inuentum, qui ex secundo in tertium, dubitandum non est, quin recte inuentus sit quartus numerus proportionalis: si vero nõ idem numerus gignatur, repetenda erit operatio. *Probatio regulæ trium.*

Est tamen alia probatio regulæ trium, à plerisque vsurpata, quæ fit hoc modo. Statuatur primus numerus in tertio loco, & tertius in primo, quartusq; in medio. Si nanque, iuxta præceptum regulæ trium, reperiatur hoc modo quartus numerus, qui prius erat se- *Alia probatio regulæ triũ.*

cundus, recte soluta fuit quæstio proposita. Vt primum exemplum supra allatum ita stabit.

Aurei.	Libræ.	Aurei.		Libræ.
20.	60'	4?	fiunt	12.

Nam si verum est, 20. aureis emi 60. lib. propterea quod 4. aureis emptę sunt libræ 12. efficitur necessario, vt vicissim 4. aureis, emantur libræ 12. hoc ipso, quod 20. aureis libræ 60. emantur.

Possunt interdum duo numeri ex datis tribus, vt primus & secundus, vel primus & tertius, ad minores redigi, vt facilior reddatur operatio. Quod quidem fiet, si tam primus, quàm secundus; vel tam primus, quam tertius, per communem aliquam vtriusque mēsuram notam, siue ea maxima sit, siue non maxima, diuidatur, & loco illorum Quotientes statuantur. Vt in hoc exemplo.

4. 12. 20. fiunt 60.

Quoniam numerus 4. metitur primum, & secundum, si, diuiso vtroque per 4. Quotientes 1. & 3. pro illis ponantur, ita stabit exemplum.

1. 3. 20. fiunt 60.

Item quia in eodem exemplo numerus idem 4. numerat primum & tertium, si, diuiso vtroque per 4. Quotientes 1. & 5. pro illis accipiantur, sic stabit idem exemplum.

1. 12. 5. fiunt 60.

Item in sequenti hoc exemplo.

36. 48. 63. fiunt 84.

Quoniam numerus 12. metitur primum, & secundum, si, diuiso vtroque pro 12. Quotientes 3.

tes 3. & 4. pro illis reponantur, ita ſtabit exemplum.

3. 4. 63. fiunt 84.

Item quia numerus 9. metitur primum, & tertium in eodem exemplo, ſi, diuiſo vtroque per 9. Quotiẽtes 4. & 7. pro illis in regula collocentur, ſic ſtabit exemplum.

4. 48. 7. fiunt 84.

Rurſus hoc etiam modo quæſtio propoſita ſoluetur Diuidatur ſecundus numerus per primum, & per Quotientem tertius multiplicetur: vel tertius per primum diuidatur, & per Quotientem multiplicetur medius. Vtroque enim modo productus numerus erit quartus proportionalis, qui quæritur. Vt in hoc exemplo.

60. 360. 132. fiunt 792.

Diuiſo ſecundo numero per primũ, fit Quotiens 6. per quem ſi multiplicetur tertius numerus, gignetur quartus 792. ac ſi iuxta præceptum regulæ trium operatus eſſes. Item diuiſo tertio numero per primum, fit Quotiens $2\frac{12}{60}$. hoc eſt, $2\frac{1}{5}$. ſiue $\frac{11}{5}$. per quem ſi multiplicetur ſecundus producetur idem quartus 792.

His recte intellectis, varijs modis examinare poteris, num per regulam trium quartus numerus recte ſit inuentus, necne. Nam ſi per varias huiuſmodi operationes eundem ſemper quartũ numerum repereris, maximo argumẽto eſt, operationẽ recte eſſe inſtitutam.

Quod ſi quis roget, qui fieri poſſit, vt per tot vias ad eundem ſemper ſcopum perueniamus, ſciat, huius rei cauſam totam ex proportionibus pendere. Quoniam enim eadẽ

proportio esse debet inter primum numerũ, & secundum, quæ inter tertium, & quartum; fit vt & permutando eadem proportio sit inter primum, & tertium, quæ inter secundũ, & quartum; Item & conuertendo eadem inter secundum, & primum, quæ inter quartum & tertium; nec non eadem inter tertium, & primum, quæ inter quartum, & secundum. Cum ergo semper eadem proportio sit inter Quotientes duorum numerorum per eundẽ numerum diuisorum, quæ inter ipsos numeros; perspicuum est, si diuidatur tam primus numerus, quàm secundus vel tam primus, quã tertius, per communem aliquam mensurã eandẽ, & pro ipsis numeris Quotientes reponantur, esse adhuc eandem proportionem inter Quotientes primi, & secundi numeri, quę est inter tertiũ numerum, & quartũ; Item eãdem esse proportionem inter Quotientes primi, & tertij numeri, quæ est inter secundum numerũ, & quartum. Rursus quoniam, diuiso numero quouis per alium numerum, producitur denominator proportionis, quã diuisus numerus habet ad diuisorẽ, denominator autem alium quemcunque numerum multiplicans producit numerum, qui ad multiplicatũ proportionem habet à dicto denominatore denominatam; fit, vt diuiso secundo, aut tertio numero per primum, Quotiens fit denominator proportionis secũdi, aut tertij numeri ad primũ. Quare si per hunc Quotientẽ multiplicetur tertius numerus, aut secũdus, procreabitur quartus; qui videlicet eandem proportionem habeat ad tertium, quam secundus

dus ad primum, vel eandem ad secundum, quam tertius ad primum.

Quoniam vero frequenter quæstiones per regulam trium soluendæ præpostero ordine proponuntur, interdum etiam diuersæ monetæ, mensuræ, vel pondera in vno numero reperiuntur, denique non raro primus numerus dissimilis est tertio, vt facile hærere, atque impediri possit is, qui parum in rebus Arithmeticis est versatus, explicabimus quæstionibus aliquot varias difficultates, quæ occurrere possunt; hinc exordientes.

Quæstiones nonnullæ, quibus variæ difficultates regulæ trium explicātur.

1. Quanti constat vna libra piperis, si 60. libræ emptæ sint aureis 20? In hac quæstione præpostere positi sunt numeri. Nam 1. libra, cuius primo loco mentio fit, quæstionem habet annexam, ac proinde tertium occupare debet locum, primum vero numerus 60. librarum, cum numero vnius libræ sit similis. Itaque recto ordine proponenda fuisset quæstio hoc modo. Libræ 60 piperis constant 20. aureis, libra ergo 1. quanti constabit? vt in apposito hic exemplo apparet.

Lib.	Aur.	Lib.		Aurei.
60.	20.	1?	fiunt	$\frac{20}{60}$. siue $\frac{1}{3}$.

Inuenies autem (si secundum numerum per tertiũ multiplices, productumq; 20. per primũ partiaris) valorẽ 1. librę esse $\frac{20}{60}$. vel $\frac{1}{3}$. vni⁹ aurei, quia cum minor numerus per maiorem diuiditur, fit fractio, cuius numerator est numerus diuidendus, denominator autem diuisor vt cap. 5. & 6. diximus. Reducetur autem vtrauis harum minutiarum, nempe prior, ad

baiochos hoc modo. Multiplicetur numerator 20. per 100. (tot enim baiochi vnum aureum conficiũt.) productusq; numerus 2000. per denominatorem 60. diuidatur. Quotiens enim dabit baiochos $33\frac{20}{60}$. siue $33\frac{1}{3}$. Tantundẽ inueniſſes, ſi poſterioris minutiæ $\frac{1}{3}$. numeratorem per 100. multiplicaſſes, productumque per denominatorem diſtribuiſſes. Quod ſi $\frac{1}{3}$. vnius baiochi ad quatrinos velis reuocare, multiplicabis numeratorem per 4. (cum tot quatrini baiochum conficiant.) productumque per denominatorem partieris. Inuenies enim quatr. $1\frac{1}{3}$. Itaque 1. libra conſtabit baioc. 33. quatr. $1\frac{1}{3}$.

Quæſt. 2. 2. Si libræ $10\frac{2}{5}$. & vnciæ $7\frac{1}{2}$. ceræ albæ cõſtent aureis 2. & Iul. 6. quantum ceræ emetur baiochis 90? Sic ſtabit exemplum.

Aur.	Iul.	Lib.	Vnc.	Baioc.		Vnc.
2.	6.	$10\frac{2}{5}$.	$7\frac{1}{2}$.	90?	ſiunt	$45\frac{207}{260}$.

Quid agẽdũ quando diuerſæ monetæ, menſuræ, põdera, & fractiones occurrunt.

Quoniam vero in primo numero, ac tertio diuerſæ monetæ continentur, reducendæ erunt omnes ad minimam monetam ibi expreſſam, vt ad baiochos, eruntque in primo numero baiochi 260. Rurſus quia in ſecundo numero reperiuntur diuerſa pondera, redigenda erunt ad minima ibi expreſſa, vt ad vncias, quarum 12. vnam libram efficiunt, erũtque in $10\frac{2}{5}$. libris vnciæ $124\frac{4}{5}$. quibus ſi addãtur vnciæ $7\frac{1}{2}$. fient vnciæ $132\frac{3}{10}$. Quo pacto autem fractiones vel ſolæ, vel vnà cum integris multiplicari inter ſe debeant, aut diuidi, docuimus cap. 13. & 14. Itaque ſic ſtabit exemplum reductum.

Baioc.

Baioc.	vnc.	Baioc.		Vnc.
260.	132 $\frac{3}{10}$	90?	fiunt	45 $\frac{207}{260}$.

Illud vero hoc loco annotandum est, minutiam ex multiplicatione medij numeri per tertium productam, licet eius numerator sit denominatore maior, non debere redigi ad integra, donec diuisio sit absoluta, ne operatio impediatur. Vnde quia tunc multiplicatio medij numeri per tertium facit $\frac{119070}{10}$. diuidenda erit hæc minutia, antequam ad integra reducatur, per primum numerum: quæ diuisio dabit hanc minutiam $\frac{119070}{2600}$. continentem vncias 45 $\frac{207}{260}$.

3. Quanti constabunt $\frac{7}{8}$. vnius vlnæ panni, si $\frac{3}{4}$. vnius aur. quispiam emerit $\frac{1}{3}$. vnius vlnæ? Sic stabit exemplum. Quæst. 3.

Vlnæ	Aur.	Vlnæ.		Aur.
$\frac{1}{3}$.	$\frac{3}{4}$.	$\frac{7}{8}$?	fiunt	1 $\frac{31}{32}$.

Multiplicatio medij numeri per tertiũ facit minutiam $\frac{21}{32}$. qua diuisa per primum numerum, inuenietur minutia hæc $\frac{63}{32}$. vnius aurei, quæ facit aur. 1 $\frac{31}{32}$. Reducta autem hæc minutia $\frac{31}{32}$. vnius aurei ad Iulios, baiochos, & quatrinos, dat Iul. 9. baioc. 6. quatr. 3 $\frac{1}{2}$.

4. Studiosus quidam in Vniuersitate volens dare operam litteris 6. annos, animaduertit se 7. mensibus, & 13. diebus expendisse aureos 200. Iulios 7. baiochos 8 $\frac{2}{7}$. Quæritur ergo, quanta pecunia indigeat. Ita stabit exemplum. Quæst. 4.

Mẽ. Di.	Aur. Iul. Baioc.	An.		Aur. Baioc.
7. 13.	200. 7. 8 $\frac{2}{7}$.	6?	fiunt	1956. 7 $\frac{191}{1575}$.

Hic in primo numero mẽſes, & in tertio anni ad dies reuocandi ſunt. Quod vt fiat, conſiderandum eſt, quinã menſes illi ſint, quia nõ omnes menſes eundem dierum numerum continent. Nam ſi ponamus priores ſeptem menſes, initio facto à Ianuario, continebunt dicti 7. menſes in anno cõmuni dies 212. vt hic vides, (in anno vero biſſextili 213. cũ in eo Februarius contineat dies 29.) Additis diebus 13. fient dies 225. Deinde conſiderandum eſt, quot anni biſſextiles in illis 6. annis contineantur. Nam pro ſingulis addendus eſt dies 1. ad dies 365. anni vnius communis. Vnde ſi ponamus duos annos biſſextiles contineri, multiplicabimus 6. annos per 365. dies, & producto numero addemus 2. vt efficiantur dies 2192. Rurſus in numero medio redigendi ſunt aurei, & Iulij ad baiochos, qui erunt numero 20078 $\frac{2}{7}$. ita vt exemplum reductum ita ſe habeat.

Ian.	31.
Febr.	28.
Mar.	31.
Apr.	30.
Maius.	31.
Iun.	30.
Iul.	31.
	212.
	13.
	225.

Dies.	Baioc.	Dies.	Baioc.
225.	20078 $\frac{2}{7}$	2192.	fiunt 195607 $\frac{191}{1575}$.

Poſtremo reducendus erit quartus numerus inuẽtus baiochorũ ad aureos, & Iulios. Faciũt autem omnes illi baiochi aureos 1956. Iul. 0. baioc. 7 $\frac{191}{1575}$. Tanta pecunia neceſſaria eſt ſtudioſo illi 6. annis, quorum duo biſſextiles ſint.

Hac

Hac eadem ratione post operationem semper reducenda est moneta quarti numeri ad maiorem, si fieri potest: Item pondera, mensuræve ad maiora pondera, vel mensuras; vt vnciæ ad libras; palmi, vel pedes ad passus, passus autem ad milliaria.

5. Quidam conficit 7. diebus milliaria 210. Peto quot diebus milliaria 1600. conficiet, si quotidie iter faciat, & cursum nec remittat, nec intendat? Sic ponetur exemplum. Quæst. 5.

Milliar.	Dies.	Milliar.		Dies.
210.	7.	1600.	fiunt	$53 \frac{70}{210}$.

Fractio hæc $\frac{70}{210}$. vnius diei in quarto numero, si numerator per 24. multiplicetur, productusque numerus per denominatorem diuidatur, redigetur ad horas 8.

6. Si aureis 100. Iulijs 7. baiochis 8. emptus sit ager passuum quadratorum 400. quanti cõstabit ager passuum quadratorum 1000. pedũ quadratorum 4. & palmorum quadratorum 3? ita stabit exemplum. Quæst. 6.

Passus.	Aur. Iul. Baioc.	Pass. Ped. Palm.
400.	100. 7. 8.	1000. 4. 3?

fiunt Baioc. $25199 \frac{17613}{80000}$.

Reductis aureis, ac Iulijs secundi numeri ad baiochos; & passibus, ac pedibus tertij numeri ad palmos; tribuendo 16. palmos quadratos vni pedi quadrato, & 25. pedes quadratos vni passui quadrato; nec non & passibus primi numeri reductis ad palmos quoq;, tribuendo vni passui quadrato 400. palmos quadratos; ita stabit exemplum reductum.

Palmi.

Palmi.	Baioc.	Palmi.		Baoc.
160000.	10078.	400067?	fiunt	25199 $\frac{17613}{80000}$.

Quartus autem numerus baiochorum continet aur.251.Iul.9.baioc.9 $\frac{17613}{80000}$.

Quæſt.7. 7. In nundinis quibuſdam 44. aureis emptę ſunt 52. vlnæ panni cuiuſdam, quanti conſtabunt vlnæ 260. eiuſdem panni? Ita ſtabit exemplum.

Vlnæ.	Aur.	Vlnæ.		Aur.
52.	44.	260?	fiunt.	220.

Quæſt.8. 8. Emit quiſpiã 52. vlnas panni 44. aureis, quot vlnas emet aureis 220? Exẽplum ita diſponetur.

Aur.	Vlnæ.	Aur.		Vlnæ.
44.	52.	220?	fiunt	260.

Quæſt. 9. 9. Emit quiſpiam ſumma quadam pecunię 52. vlnas panni, atque eodem pretio accepit poſtea 260. vlnas, quæ conſtiterunt aureis 220. quid ergo prius expendit? Diſponetur exemplum hoc modo.

Vlnæ.	Aur.	Vlnæ.		Aur.
260.	220.	52?	fiunt	44.

Quæſt.10. 10. Vlnas aliquot panni emit quidam 44. aureis, atq; eodem pretio alius deinde aureis 220. emit vlnas 260. quot ergo vlnas prior emit? Stabit exemplum hoc modo.

Aur.	Vlnæ.	Aur.		Vlnæ.
220.	260.	44?	fiunt	52.

Appoſui quator hæc poſtrema exempla, in quibus ijdem quatuor numeri regulæ trium varijs modis vices inter ſe permutant, quippe

cum

cum quisque illorũ ex alijs tribus datis eruatur, vt intelligas, quo pacto te gerere debeas in alijs quæstionibus similibus.

REGVLA TRIVM EVERSA. siue contraria

CAPVT XVIII.

Diximus, in quatuor numeris regulę trium eam proportionem esse primi numeri ad secundum, quæ est tertij ad quartum, atque adeo, (vt ex propos. 14. lib. 5. Eucl. colligitur.) si primus maior est, vel minor tertio, secundum quoque maiorem esse, vel minorem quarto; id quod in exemplis omnibus hactenus adductis perspicuum esse potest. Solet autem nonnunquam accidere, vt quo maior est primus numerus tertio, eò minor esse debeat secundus quarto; & quo minor est primus tertio, eo maior esse debeat secundus quarto. Quare contraria tunc via tenenda erit, nempe primus numerus per secũdum multiplicandus, numerusque productus per tertium diuidendus. Quando autem hæc regula trium euersa (ita eam appellant) adhibenda sit, & ratio naturalis dictare videtur, & clarissime ex sequentibus exemplis intelligi potest, quorum primum hoc sit.

Regula triũ euersa quo pacto quarũ numerũ eliciat.

1. Pannus 9. vlnarum, cuius latitudo est 3. palmorum, emitur à quodam, vt sibi tunica conficiatur. Quot ergo vlnæ alterius panni, cuius latitudo est 2. palmorum, requiruntur ad eandem tunicam, vel similem conficiendam? Quoniam quæstio est de panno latitudinem habente 2. palmorum, ita stabit exemplum. Quæst. 1.

Pal-

Palmi latitud.	Vlnæ.	Palmi latitud.	Vlnæ.
3.	9.	2?	fiunt $13\frac{1}{2}$.

Hic manifeste vides, quo angustior est secundus pannus, eo plures vlnas esse necessarias. Quare licet primus numerus tertio maior sit, non tamen propterea secundus maior etiam esse debet quarto, sed minor; ita vt quam proportionem habet tertius numerus ad primum, eam habeat secundus ad quartum. Hinc fit, vt primus per secundum sit multiplicandus, numerusque productus per tertium diuidendus: quia vt debita proportio seruetur, tertius numerus primum locum obtinere debet in regula proportionum, vt dictum est, atque hic apparet.

Palmi latitud.	Palmi latitud.	Vlnæ.	Vlnæ.
2.	3.	9?	fiunt $13\frac{1}{2}$.

Quæst.2. 2. Quidã accepit mutuo ab alio 4000. aur. ad annos 3. quos cum ei restitueret, nullum censum accipere voluit, sed tantũ petijt, vt ei vicissim pecuniam mutuo daret. Dedit ergo ei mutuo 7480. aur. Quamdiu ergo hic pecuniam istam retinere debet, vt ei satisfiat pro beneficio præstito per 4000. aur. quos illi accommodauerat? In hac quæstione, quia nũmerus 7480. aur. secum habet quæstionem, collocandi erunt numeri hoc ordine.

Aur.	Anni.	Aur.		Anni.	Dies.	Horæ.
4000.	3.	7480?	fiunt	1.	220.	$13\frac{89}{187}$.

Perspicuum etiam hic est, maiorem censum deberi inæquali tempore aureis 7480. quàm

aur.

aur. 4000. atque adeo minori tempore opus esse,quam 3.ann. vt idē cēsus, qui debetur aur. 4000. tribus annis,lucrifiat ex aur.7480.Quare licet primus numerus minor sit, quàm tertius, non tamen idcirco secundus minor etiam erit, quàm quartus, sed maior; ita vt quam proportionem habet tertius numerus ad primum,eam habeat secūdus ad quartum. Ex quo fit, multiplicandum esse primum per secundum,productumq; numerum per tertiū diuidendum:quia vt debita proportio seruetur,tertius numerus primum locum obtinere debet in regula proportionum, vt dictum est, atque hic apparet.

Aur.	Aur.	Anni.		Anni.	Dies.	Horæ.
7480.	4000.	3?	fiunt	1.	220.	13 $\frac{89}{187}$.

3. Quando mensura tritici emitur 6.aureis,panis vno baiocho emptus, iuxta ciuitatis alicuius ordinationem,pondus habet 10. vnciarum; Iam si eadem mensura tritici ematur 4. aureis,vel 8. aureis,quantum esse debet eiusdem panis pondus? Ita stabunt exempla. Quæst. 3.

Aur.	Vnciæ.	Aur.		Vnciæ.
6.	10.	4?	fiunt	15.
6.	10.	8?	fiunt	7 $\frac{1}{2}$.

Ratio dictat, quo vilius est triticū, eo maius pondus habiturum panem, & quo carius, eo minus. Talis enim proportio debet esse 4. aur. ad 6. aur. vel 8. aur. ad 6. aur. qualis est ponderis 10. vnciarum ad pondus ignotum,

quod

quod quæritur. Vnde iuxta regulam proportionum ita collocandi essent numeri.

Aur.	Aur.	Vnciæ		Vnciæ.
4.	6.	10.	fiunt	15.
8.	6.	10?	fiunt	$7\frac{1}{2}$.

Quæst. 4. 4. Operarij 30. perficiunt opus quoddam in 4. annis; quanto ergo tempore idem absoluent 50. operarij, vel 20? vel, quot operarij idem absoluent in annis 2. & diebus 146? Vel in annis 4. & diebus 292? Quadruplex hoc exemplum ita stabit, reductis annis (quorũ quilibet statuatur dierũ 365.) ad dies, in posterioribus duobus exemplis.

Operarij.	Anni.	Operarij.		Anni.	Dies.
30.	4.	50?	fiunt	2.	146.
30.	4.	20?	fiunt	6.	0.

Dies.	Operarij.	Dies.		Operarij.
1460.	30.	876?	fiunt	50.
1460.	30.	1752?	fiunt	25.

Quo enim plures sunt operarij, eo minore tẽpore opus est, quo autem pauciores, eo maiore. Item quo minus tempus est, eo pluribus operarijs opus est, quo autem maius, eo paucioribus. Igitur iuxta regulam proportionum ita collocarentur numeri.

Operarij.	Operarij.	Anni.		Anni.	Dies.
50.	30.	4?	fiunt	2.	146.
20.	30.	4?	fiunt	6.	0.

Dies.	Dies.	Operarij.		Operarij.
876.	1460.	30?	fiunt	50.
1752.	1460.	30?	fiunt	25.

5. Obses-

5. Obsessus quidam exercitus 8500. militum victum habet ad 11. menses; verum spes nulla est solutionis obsidionis, vel futuri auxilij, nisi post 25. menses. Quot ergo milites retinendi sunt, vt reliquis victus sufficiat ad 25. menses? Numeri ita disponendi sunt.

Menses.	Milites.	Menses.		Milites.
11.	8500.	25?	fiunt	3740.

Retinendi ergo erũt milites 3740. his enim victus sufficiet ad 25. menses, dimittendiq; propterea erunt milites reliqui 4760.

REGVLA TRIVM COMPO

CAPVT XIX.

FIT, vt interdum plures, quàm tres numeri proponãtur noti, ita tamen, vt sint semper tres principales, alij autem illis adiuncti minus principales, denotantes vel tempus, vel lucrũ, damnumve. Quod vbi cõtigerit, fit regula trium composita, & tunc vel instituenda erit regula trium bis, aut ter, vel quilibet per sibi adiunctos multiplicandus, vt fiant tres tantum numeri noti, per quos quartus ignotus eliciatur, vel certe ~~alia quadam via tentanda~~. Id quod sequentibus exemplis perspicuum fiet, in quibus variæ quæstiones de lucro, damno, interueniente etiam diuersitate temporis, & varietate lucri in ratione tot pro 100. discutientur.

1. Sunt 8. in communi conuictu, quorum singuli singulis mensibus soluunt 6. aureos. Quantum ergo erit pretium victus omniũ ad

 4. an-

4. annos? Hæc quęstio ita recte proponeretur. Vnus in vno mense soluit 6. aureos: quid ergo soluent 8. in 4. annis, hoc est, in 48. mensibus? Ita autem collocandi erunt numeri.

Cõuictor. Mẽses		Aur.	Conuictores. Mẽses.	
1.	1.	6.	8.	48?

fiunt Aur. 2304.

Vbi vides, primum nũmerum vnius conuictoris habere adiunctum vnum mensem, [illegible] autem 8. conuictorum habere adiun[illegible] [illegible]nses. Primo ergo ita instituetur re[illegible] [illegible]. Si vnus soluit 6. aureos, quantum [illegible] vt hic.

[illegible]uict.	Aur.	Conuict.		Aur.
1.	6.	8?	fiunt	48.

Soluent ergo 8. cõuictores in vno mẽse 48. aureos, cum vnus soluat 6. aureos in mense. Secundo ergo iterum ita instituetur regula triũ. Si in vno mense soluunt 48. aureos, quantum soluent in 48. mensibus? vt hic.

Mensis.	Aur.	Menses		Aurei.
1.	48.	48?	fiunt	2304.

Breuius tamẽ eadem quæstio [illegible], si tã duo numeri in principio quæ[illegible]onis primo loco positi inter se, quàm duo tertio loco positi inter se multiplicentur, vt fiant tres numeri regulæ t[illegible]m hoc modo.

	Aur.			Aur.
1.	6.	384?	fiunt	2304.

Nam ex hac multiplicatiõe procreatur nu-merus maior conuictorum pro vno mẽse, qui
[illegible]

æquiualet minori pro pluribus mensibus. Vt ex multiplicatione 8. conuictorum per 48. menses producuntur 384. conuictores pro vno mense. Si enim singulis mensibus sunt 8. conuictores, procul dubio in 48. mensibus, si accederent semper noui conuictores, fierent 384. conuictores: atque ita tantum soluent hi 384. conuictores in vno mense, quantum 8. conuictores in 48. mesibus. Hæc est causa, cur multiplicandi sint numeri principales, per adiunctos minus principales, qui tempus significant, vel aliud quippiam, dummodo non sit de eadem re, quam significant numeri principales; alioquin non essent duo numeri, sed vnus. Vt si in aliquo loco positi sint aurei, baiochi, & quatrini, censebuntur tres hi numeri pro vno, cum sint de eadem re, vtpote qui monetam significent. Eademque ratio est proportione quadam in alijs huiusmodi questionibus.

2. Pro 200. libris quarundam mercium aduectis per 100 milliaria soluendi sunt 4. aurei. quantum ergo soluendum est pro 300. libris aduectis per 400. milliaria? Ita collocabuntur numeri. Quæst. 2.

Lib. Mill.	Aur.	Lib. Mill.		Aur.
200. 100.	4.	300. 400?	fiunt	24.

Multiplicatis duobus numeris primi loci, & duobus tertij loci inter se, confecti erunt tres numeri regulæ trium hoc pacto.

	Aur.			Aur.
20000.	4.	120000?	fiunt	24.

Si eadem hæc questio soluenda sit per regu-

 lam

lam trium bis repetitam, ita ſtabit primo loco exemplum.

Lib. Aurei. Lib. Aurei.
200. 4. 300? fiunt 6.

Atque ita ſoluẽdi eſſent 6. aurei pro 300. libris per 100. milliaria aduectis, per quot nimirum 200. libræ ſunt aduectæ; Sed quoniã 300. libræ vehẽdæ ſunt per 400. milliaria, ita rurſus ſtabit ſecundo loco exemplum.

Mill. Aur. Mill. Aur.
100. 6. 400? fiunt 24.

Quæſt. 3. 3. Tres Perſonæ conſumunt modium tritici 3. aureis emptum in 5. ſeptimanis, quantus ergo eſt ſingularum ſumptus in vno die? Ita numeri ordinandi erunt.

Perſ. Sept. | Aur. | Perſ. Dies.
3. 5. | 3. | 1. 1?

fiunt Aur. $\frac{3}{105}$. hoc eſt, quatrini $11\frac{3}{7}$.

Reductis autem 5. ſeptimanis ad dies, vt primus numerus, ac tertius ſimiles ſint, ita ſtabit exemplum.

Perſ. Dies. | Aur. | Perſ. Dies.
3. 35. | 3. | 1. 1?

fiunt Aur. $\frac{3}{105}$. hoc eſt, quatrini $11\frac{3}{7}$.

Multiplicatis duobus numeris primi loci, & duobus tertij inter ſe, diſponentur tres numeri ad regulam trium hoc modo.

Aur. Aur. quatr[ini]
105. 3. 1? fiunt $\frac{3}{105}$. hoc eſt, $11\frac{3}{7}$.

Per regulam trium bis repetitam ita ſolue-tur eadem quæſtio.

Perſ.

Perſ.	Aur.	Perſ.		Aur.
3.	3.	1?	fiunt	1.

Item.

Dies.	Aur.	Dies.		Aur.	quatrini.
35.	1.	1?	fiunt	$\frac{1}{35}$. hoc eſt,	$11\frac{3}{7}$.

4. Si 300. aurei in 4. annis lucrantur 100. aureos, quid lucrabuntur 1580. aurei in 7. annis? Multiplicatis aureis, qui ad lucrum exponuntur, per tempus adiunctum, ita ſtabit exemplum. Quæſt. 4.

Aur.				Aur.
1200.	100.	11060?	fiunt	$921\frac{2}{3}$.

Per regulam trium bis repetitam ita ſtabit exemplum.

Aur.	Aur: lucrum.	Aur.		Aur. lucrum.
300.	100.	1580?	fiunt	$526\frac{2}{3}$.

Item.

Anni.	Aur.	Anni.		Aur.
4.	$526\frac{2}{3}$.	7?	fiunt	$921\frac{2}{3}$.

5. Quidam in tribus menſibus 10. aureis lucratus eſt 4. aureos. in quanto ergo tempore 100. aureis, lucrabitur 2000. aureorum? Hæc quæſtio redigi non poteſt ad ſimplicem regulam trium, propterea quod tẽpus, in quo 100. aurei lucrari debent 2000. aureos, ignotũ eſt, atque adeo per 100. aureos multiplicari non poteſt. Adhibenda ergo erit regula trium bis, hoc modo. Quæſt. 5.

Aur.	Aur. lucr.	Aur.		Aur. lucr.
10.	4.	100?	fiunt	40.

Atque ita 100. aurei lucrabuntur 40. aureos

 in tri-

in tribus mensibus, in quibus 10. aurei lucrati sunt 4. Quare vt sciatur, in quanto tempore 100. aurei lucraturi sunt 2000. instituetur secundo regula trium hoc modo.

Aur.	Menses.	Aur.		Menses.
40.	3.	2000?	fiunt	150.

Itaque si 10. aurei in 3. mensibus lucrantur 4. aureos, 100. aurei lucrabuntur 2000. aur. in 150. mensibus. Quod facile probabitur, si quæstio ita proponatur. Si 10. aur. in 3. mens. lucrãtur 4. aur. quantum in 150. mens. lucrabuntur aurei 100? Reperietur enim lucrum 2000. aur. vt hic apparet.

Aur.	Mens.	Aur.	Aur.	Mens.		Aur.
10.	3.	4.	100.	150?	fiunt	2000.

Nam si tempus quodlibet per suam pecuniam multiplicetur, stabit exemplum ad simplicem regulam trium reductum hoc modo.

Aur.				Aur.
30.	4.	15000?	fiunt	2000.

Quæst. 6. *6.* Si 100. aurei in 8. mensibus lucrantur 20. aureos, in quãto tempore ijdem 100. aurei lucrabuntur 3000. aur? Dispositio numerorum ita se habet.

Aur.	Mens.	Aur.		Mens.
20.	8.	3000?	fiunt	1200.

Quando enim eadem semper summa exponitur ad lucrum, non ponenda est ea inter numeros alios. Idem etiam fiet, quando idem tempus proponitur, vt in sequenti exemplo apparebit.

Quæst. 7. 7. Si 300. aurei in 7. mensibus lucrantur 45. aureos,

aureos, quid lucrabũtur 1780. aurei in eisdem 7. mensibus? Ita stabit exemplum.

Aur.	Lucr. aur.	Aur.		Lucr. aur.
300.	45.	1780.	fiunt	267.

8. Si singulis militibus in singulos menses tribuerentur 4. aurei, quantum pecuniæ expenderetur in militibus 13000. nouem mensibus? Ita stabit exemplum. Quæst. 8.

Milit. Mens.	Aur.	Milit. Mẽs.	Aur.
1. 1.	4.	13000. 9?	fiũt 468000.

9. Si 10. equis quotidie dentur 7. mensuræ hordei, vel auenæ, quot mensuræ, iuxta eandẽ distributionem, conuenient 100. equis ad 20. dies? ita stabit exemplum. Quæst. 9.

Equi. Dies.	Mẽsuræ.	Equi. Dies.	Mẽsuræ.
10. 1.	7.	100. 20?	fiũt 1400.

10. Si duodecim messores demetant 20. iugera in 9. diebus, quanto tempore 30. messores demetent 45. iugera? Hic opus est regula triũ bis repetita, primo tamen loco euersa, quòd 30. messores minori tempore indigeant ad demetenda 20. iugera, quàm 12. messores. Ita ergo stabit regula trium euersa. Quæst. 10.

Messores.	Dies.	Messores.		Dies.
12.	9.	30?	fiunt	$3\frac{3}{5}$.

Atque diebus $3\frac{3}{5}$. demetent 30. messores 20. iugera. Quare ita rursum stabit exemplum ad regulam trium.

Iugera.	Dies.	Iugera.		Dies.
20.	$3\frac{3}{5}$.	45.	fiunt	$8\frac{1}{10}$.

11. Romæ aureus ducatus æstimatur Iulijs 11 $\frac{1}{2}$. hoc est, baiochis 115. Quot ergo eius- Quæst. 11.

 modi

modi ducatos recipiam pro 1000. aureis, quorum singuli 10. Iulijs, siue 100. baiochis æstimantur? Vel si 20. ducati cõstituant 23. aureos, quot ducatos efficiẽt 1000. aurei? Vtrumq; exemplum sic stabit, reductis prius 1000. aureis ad baiochos 100000.

Baioc.	Duc.	Baioc.	Duc.
115.	1.	100000? fiunt	869 $\frac{13}{23}$.

Aur.	Duc.	Aur.	Duc.
23.	20.	1000? fiunt	869 $\frac{13}{23}$.

Quæst. 12. 12. Quot aureos reddent ducati 4000. si 1. aureus contineat 100. baiochos, at 1. ducatus 115. baiochos? vel si 20. ducati ęstimentur 23. aureis, quot aureos continebunt ducati 4000? Reductis 4000. ducatis prioris exempli ad baiochos 460000. sic stabit vtrumque exemplum.

Baioc.	Aur.	Baioc.	Aur.
100.	1.	460000? fiunt	4600.

Duc.	Aur.	Duc.	Aur.
20.	23.	4000? fiunt	4600.

Quæst. 13. 13. Mercator quidam emit 300. libras cuiusdam mercis aureis 60. scire autem cupit, quantum pro 100. aureis lucraturus sit, si easdem 300. libras vendat 64. aureis? vel quantum pro 100. aureis perditurus sit, si 300. illas libras vendat 57. aureis? Hic manifestum est, eum pro 60. aureis esse lucraturum 4. aureos, vel perditurum 3. aureos: vt patet, si minus pretium à maiori subducatur. Dic ergo. Si 60. aur. lucrantur 4. aureos, vel perdunt 3. aur. quantum lucrabuntur, vel perdent 100. aurei?

Aur.

Aur.	Lucr. aur.	Aur.		Lucr.aur.
60.	4.	100?	fiunt	$6\frac{2}{3}$.

Aur.	Damnum aur.	Aur.		Damnum aur.
60.	3.	100?	fiunt	5?

14. Quærit apud ſe mercator quidã, quanti emendæ ſint libræ 100. alicuius mercis, vt eædem poſtea venditæ 64. aureis lucrum dẽt aur. $6\frac{2}{3}$. pro 100. aur? Perſpicuum eſt, eũ, qui $6\frac{2}{3}$. aur. lucrari vult pro 100. aur. augere velle 100. vt fiant $106\frac{2}{3}$. Dic ergo. Si $106\frac{2}{3}$. aur. qui continent & pretium 100. aureorum, & lucrum $6\frac{2}{3}$. aur. proueniunt ex 100. aureis, ex quo prouenient 64. aurei, qui continent & pretium 100. librarum ignotum, & lucrum ſimul, ignotum etiam, quod reddat $6\frac{2}{3}$. pro 100. Quæſt. 14

Pret. & lucr.	Aur.	Pretium, & lucr.		Aur.
$106\frac{2}{3}$.	100.	64?	fiunt	60.

Emendæ ergo ſunt 100. libræ aureis 60. Nam diuẽditę poſtea 64. aureis dant lucrũ 4. aureorum, aut pro 100. dabunt lucrum $6\frac{2}{3}$. aur.

15. Empta eſt gemma quædam, quæ ſi vendatur 200. aureis, perduntur 10. aurei pro 100. quanti ergo conſtitit gemma illa? Hic etiam clarum eſt, eum, qui perdit 10. pro 100. facere 90. ex 100. Dic ergo. Si 90. aur. fiunt ex 100. aur. ex quo fient 200. aur.? Quæſt. 15.

Aur.	Aur.	Aur.		Aur?
90.	100.	200?	fiunt	$222\frac{2}{9}$.

Conſtitit ergo gemma illa $222\frac{2}{9}$. aur. Quod vt probes, dic. Si ex $222\frac{2}{9}$. aur. fiunt 200. aur. quid fiet ex 100? Inuenies enim fieri 90. aure-

os, ac proinde damnum fieri 10. aureorum pro 100. vt hic vides.

Aur.	Aur.	Aur.		Aur.
$222\frac{2}{9}$.	200.	100?	fiunt	90.

vel dic. Si pro $222\frac{2}{9}$. aur. amitto $22\frac{2}{9}$. aur. (Nã si gemma illa empta sit $222.\frac{2}{9}$. aur. vendatur autem 200. aureis, liquido constat, damnum fieri $22\frac{2}{9}$. aur.) pro 100. quid amittam? Inuenies enim damnum 10. aureorum, vt hic apparet.

Aur.	Damnum aur.	Aur.		Damnum aur.
$222\frac{2}{9}$.	$22\frac{2}{9}$.	100?	fiunt	10.

Quæst. 16. 16. Emit quidam 1000. vlnas panni certo pretio, quas si 3. aureis minoris emisset, & védidisset postea 3600. aureis, lucratus fuisset 10. pro 100. aureis: quanti ergo 1000. illas vlnas emit? Quoniam qui lucrari cupit 10. pro 100. vult ex 100. facere 110. Dic ergo. Si 110? fiunt ex 100. ex quo fient 3600? vt hic cernis.

Aur.	Aur.	Aur.		Aur.
110.	100.	3600?	fiunt	$3272\frac{8}{11}$.

Si igitur voluisset tantum lucrari 10. pro 100. constitissent illæ 1000. vlnæ aureis $3272\frac{8}{11}$. Nam si $3272\frac{8}{11}$. aur. dant 3600. aureos, aurei 100. dabunt 110. aureos, ac proinde 10. cedent in lucrum ex 100. vt hic patet.

Aur.	Aur.	Aur.		Aur.
$3272\frac{8}{11}$.	3600.	100?	fiunt	110.

Vel si $3272\frac{8}{11}$. aur. lucrantur $327\frac{3}{11}$. aur. (Qui enim emit quippiam $3272\frac{8}{11}$. aureis, postea autem vendit aureis 3600. lucratur necessario $327\frac{3}{11}$. aur) 100. aur. lucrabuntur 10. aur. vt hic vides.

Aur.

Aur.	Lucr. aur.	Aur.		Lucr. aur.
$3272\frac{8}{11}$.	$327\frac{3}{11}$.	100?	fiunt	10.

Sed quoniam in quæstione additum est, eum lucraturum fuisse 10 aur. pro 100. si 1000. illas vlnas 3. aureis minoris emisset, vendidissetque 3600. aureis; liquido constat, eum 3. aureos expendisse vltra $3272\frac{8}{11}$. aureos. Quare 1000. constiterunt $3275\frac{8}{11}$. aur.

17. Emit quidam 1000. vlnas panni certo pretio, quæ si 6. aur. pluris cōstitissent, & vēditæ postea fuissent 3600. aureis, perditi fuissent 10. aur. pro 100. quantū ergo fuit pretiū illarum 1000. vlnarum? Quoniam qui perdit 10. pro 100. facit 90. ex 100. Dic ergo. Si 90. fiunt ex 100. ex quo fient 3600? Quęst. 17

Aur.	Aur.	Aur.		Aur.
90.	100.	3600?	fiunt	4000.

Si igitur perdidisset tantum 10. pro 100. constitissent 1000. vlnæ 4000. aureis. Nam si 4000. aur. dant 3600. aur. dabunt 100. aurei aureos 90. vt patet. Vel si 4000. aur. pendunt 400. aur. (Qui enim emit rē aliquam 4000. aureis, eandem autem vendit 3600. perdit omnino 400. aur.) 100. aurei perdent 10. aureos, vt hic vides.

Aur.	Damn. aur.	Aur.		Damn. aur.
4000.	400.	100?	fiunt	10.

Quia vero additum est in Quæstione, eum perditurum fuisse 10. pro 100 si 1000. vlnas 6. aureis pluris emisset, eásque vendidisset postea 3600. aureis; liquet, eum 6. aureos min⁹ expendisse quam 4000. Quare 1000. vlnæ cōstiterunt 3994. aur.

18. Qui

Quæst. 18. 18. Qui singulas libras mercis alicuius vẽdit 20. baiochis lucratur 30. pro 100. quantum ergo lucrabitur, si vendat maiori pretio, nẽpe 24. baiochis? Hic primum inuestigare oportet, quanti constat vna libra, vt vendita 20. baiochis, det lucrũ 30. pro 100. vt in quæstione 14. docuimus, hoc modo. Si 130. (pretium nimirum 100. & lucrum 30?) proueniũt ex 100. vt pretio; ex quo prouenient 20. baiochi, qui continent & pretium vnius libræ ignotum, & lucrum simul, ignotum etiam, quod reddat 30. pro 100?

130. 100. 20? fiunt $15\frac{5}{13}$.

Constabit ergo vna libra $15\frac{5}{13}$. baiochis. Ita enim fiet, vt cum baiochi $15\frac{5}{13}$. (vna libra vendita 20. baiochis) lucrentur baiochos $4\frac{8}{13}$. lucrifiant ex baiochis 100. baiochi 30. vt hic vides.

$15\frac{5}{13}$. $4\frac{8}{13}$. 100? fiunt 30.

Iam vero inuento pretio vnius libræ, $15\frac{5}{13}$. baioch. perspicuum est, si vna libra vendatur 24. baiochis, ex baiochis $15\frac{5}{13}$. lucrifieri baiochos $8\frac{8}{13}$. Quare ex 100. baioch. lucrifiẽt 56. baiochi, vt hic vides.

$15\frac{5}{13}$. $8\frac{8}{13}$. 100? fiunt 56.

Quæst. 19. 19. Qui 100. libras mercis alicuius vendit 10. aur. perdit 10. pro 100. quantum ergo pro 100. perdet, si eas vendat minori pretio, nempe 8. aureis? Hic etiam primum inuestigare oportet, quanti constent 100. illæ libræ, vt vẽditæ 10. aureis damnum inferant 10. aureorum pro 100. vt in quæstione 15. docuimus, hoc modo. Si 90. fiunt ex 100. (qui enim perdit 10. pro

10. pro 100. facit 90. ex 100) ex quo numero fient 10?

90. 100. 10? fiunt $11\frac{1}{9}$.

Emptæ ergo sunt illæ 100. libræ aureis $11\frac{1}{9}$. Ita enim fiet, vt cum aurei $11\frac{1}{9}$. (venditis 100. illis libris 10. aureis) perdant aur. $1\frac{1}{9}$. perdantur 10. pro 100. vt hic cernis.

$11\frac{1}{9}$. $1\frac{1}{9}$. 100? fiunt 10.

Inuento autem pretio 100. illarum librarũ $11\frac{1}{9}$. aur. manifestum est, si eædem 100. libræ vendantur 8. aureis, ex $11\frac{1}{9}$. aur. amitti aureos $3\frac{1}{9}$. Quamobrem pro 100. perdentur 28. vt hic vides.

$11\frac{1}{9}$. $3\frac{1}{9}$. 100? fiunt 28.

20. Mercator quidam in Lusitania emit 50000. lib. piperis, aur. 10000. & ibidem pro vectigali soluit aureos 500. Naulum autem illinc in Italia constitit 300. aureis, & in portu aliud vectigal exactum est 200. aur. Vectura deinde à mari Florentiã vsq; constitit 100. aur. ibiq; aliud vectigal persolutum 100. aur. Ministris deniq; ad eam negotiationẽ missis pro mercede, & victu dati sunt 1000. aurei. Verũ hæsitat, quanti vendenda sit libra, vt supra omnes impensas de singulis libris lucretur 2. Iulios. Hic omnes impensas primum in vnã summam colligere oportet, vt habeatur pretiũ, quod cum omnibus illis impẽsis pro 50000. libris expositum est. Summa autem Quest. 20.

	Aurei.
Piper.	10000.
Vectigal.	500.
Naulum.	300.
Vectigal.	200.
Vectura.	100.
Vectigal.	100.
Ministri.	1000.
	12200.

tem

tem hęc in exemplo dato cõplectitur 12200. aur. Quare si 50000. lib. constant 12200. aureis, siue 122000. Iulijs, vna libra constabit $2\frac{11}{25}$. Iul. vt hic vides.

Lib.	Iul.	Lib.		Iul.
50000.	122000.	1?	fiunt	$2\frac{11}{25}$.

Igitur si singulas libras vendat $4\frac{11}{25}$. Iul. lucrabitur de singulis libris Iulios 2.

REGVLA SOCIETATVM.

CAP. XX.

Regula societatum, quãdo adhibetur, & quo pacto fiat.

SEquitur societatum regula immensum vsum apud mercatores habens, quæ quidem tota nititur regula trium, vt ex propositis exemplis fiet perspicuum. Adhibetur autem, quando plures consortium ineunt, ita vt singuli summam quandam pecuniæ cõferant, fitque hoc modo. Pecuniæ omnium in vnam summam colliguntur, & numerus collectus primo loco in regula trium statuitur: Secundum vero locum occupat lucrum commune, vel damnum, quod ex omnium pecunijs prouenit: Tertium denique locum tenent pecuniæ singulorum, &c. ita vt toties adhibenda sit regula trium, quot sunt illi, qui societatem inierunt. Quando autem interuenit temporum diuersitas, multiplicanda erit cuiusque pecunia per suum tempus; antequam omnium pecuniæ in vnam summam colligantur. Deinde hi numeri producti colli-

Quoties regula trium adhibenda sit in regula societatum.

Quando est diuersitas tẽporum in regula societatũ. quid agẽdum.

colligendi in vnam summam, vt habeatur primus numerus in regula trium. Tertium autem locum occupabunt singuli numeri producti ex multiplicatione pecuniæ cuiusque in suum tempus, collocato rursus lucro, vel damno communi in medio loco. Id quod in exemplis manifestum erit, quorum primum hoc sit.

1. Quatuor mercatores, inito consortio, lucrati sunt in nũdinis quibusdam 6000. aur. Primus autem illorum contulit tantum 60. aur. secundus 100. tertius 120. & quartus 200. In quæstionem iam vocatur, quid quisque ex illo lucro accipere debeat, habita ratione pecuniæ, quam exposuit. Ante omnia colligẽda est summa ex omnium pecunijs, quæ est 480. aur. Deinde quater instituenda est regula trium hoc modo. Si 480. aurei (quæ est pecunia ex omnium pecunijs collecta) lucrati sunt 6000. aur. quid lucrabuntur 60. aur. quid 100. quid 120. & quid 200. quos singuli posuerunt? veluti hic apparet. Quæst. 1.

Aur.	Lucr. aur.	Aur.		Lucr. aur.
480.	6000.	60?	fiunt.	750. Pri.
		100?		1250. Secũ.
		120?		1500. Tert.
		200?		2500. Quar.
				6000.

Facta operatione, vt præcipit regula trium, reperies, primum debere accipere 750. aur. secundum 1250, tertium 1500. & quartum 2500.

Examen

Examen huius rei erit, si lucra omnium in vnam summam collecta efficiant lucrum totum, vt in proposito exemplo factum esse vides.

Quæst. 2. 2. Tres mercatores, emptis mercibus nauem onerarunt. Primi merces constiterunt 300. aur. secundi 500. tertij 180. Graui deinde tempestate orta, proiectæ sunt in mare merces grauiores, quæ constabant 400. aur. Conuenit autem inter eos, vt iactura hęc communis sit. Quantum ergo quisq; damnũ feret pro rata suarum merciũ portione? Colligantur in vnam summam aurei omnium, & numerus collectus 980. in primo loco regulæ trium collocetur, damnum vero commune in secundo, & pecuniæ singulorum in tertio, vt hic vides.

Aur.	Dãn. aur.	Aur.		Damn. aur.
980.	400.	300.	fiunt	$122\frac{440}{980}$. prim.
		500.		$204\frac{80}{980}$. secũ.
		180.		$73\frac{460}{980}$. tertij.

Primus ergo perdet $122\frac{440}{980}$. aur. secundus $204\frac{80}{980}$. & tertius $73\frac{460}{980}$.

Quæst. 3. 3. Tres emere volunt 4000. libras sacchari, quæ æstimantur 500. aur. Primus tamen vult 1300. lib. secundus 1460. tertius denique reliquas lib. 1240. quantum ergo soluet quilibet? Dic, si 4000. lib. valent 500. aur. quid valent 1300. quid 1460. & quid 1240. lib. quas singuli capere volunt? Inuenies enim primũ soluere aur. $162\frac{1}{2}$. secundum $182\frac{1}{2}$. & tertium 155. vt hic vides.

Lib.

	Lib.		Aur.
Lib. Aur.	1300?		$162\frac{1}{2}$. primi.
4000. 500.	1460?	fiunt	$182\frac{1}{2}$. ſecundi.
	1240?		155. tertii.

4. Tres ſocietate inita, lucrati ſunt 1000. aur. Primus expoſuit 200. aur. eoſque poſt 8. meſes repetijt. Secundus cõtulit 450. aur. eoſque poſt 6. menſes recepit. Tertius denique 500. aur. attulit, eoſque in negotiatione reliquit 10 menſibus. Quantum ergo quiſque ex lucro accipiet, habita ratione ſuæ pecuniæ, & temporis? Cuiuſque pecunia per ſuum tempus multiplicetur, & numeri producti in vnam ſummam colligantur, pro primo numero regulæ trium: ſecundum vero locum occupet lucrum: tertium denique tres illi producti. In noſtro exemplo, ex pecunia primi in ſuum tempus fiunt 1600. ex pecunia ſecundi in ſuum tempus, 2700. ex pecunia tertij in ſuum tempus, 5000. horum autem productorum ſumma eſt 9300. Sic ergo ſtabit exemplum. Quæſt. 4. cum tempore

			Lucr. aur.
Lucr. aur.	1600?		$172\frac{4}{93}$. Primi.
9300. 1000.	2700?	fiunt	$290\frac{30}{93}$ Secun.
	5000?		$537\frac{59}{93}$. Tertij.

5. Tres, ſocietate inita, lucrati ſunt 1000. aur. Primus poſuit 300. aur. per 10. menſes. Secundus attulit 700. aur. Tertius vero 800. aur. Accepit autem primus ex lucro 500. aur. ſecundus 300. & tertius 200. Quanto ergo tempore fuerunt duorum poſteriorum pecuniæ in negotiatione? Quoniam, vt in præce- Quæſt. 5.

 denti

denti quæſtione dictum eſt, pecúnia cuiuſque in ſuum tempus multiplicanda eſt; multiplicabimus pecuniam primi per ſuum tempus, faciemuſque 3000. atque ex hoc producto prouenit lucrum primi. Vt igitur ſciamus, ex quibuſnam productis lucra poſteriorum duorum proueniant, dicemus. Si 500. aur. (quod eſt lucrum primi) proueniunt ex 3000. ex quo prouenient 300. & 40. aur. quæ ſunt lucra poſteriorum? Veluti hic apparet.

Lucr. aur.		Lucr. aur.		
500.	3000.	300?	ſunt	1800. Secundi.
		200?		1200. Tertij.

Secundi ergo tempus per ſuam pecuniam multiplicatum facit 1800. Tertij vero 1200. Quare ſi 1800. diuidamus per 700. hoc eſt, per pecuniam ſecundi, inueniemus menſes $2\frac{4}{7}$. quibus à ſecundo expoſiti ſunt ad lucrum 700. aurei. Item ſi 1200. partiamur per 800. id eſt, per pecuniam tertij, reperiemus menſes $1\frac{1}{2}$. pro tertio.

Hoc ita eſſe experieris, ſi ita conſortium proponas. Tres, inito conſortio, lucrati ſunt 1000. aur. Primus poſuit 300. aur. per 10. menſes: ſecundus 700. aur. per menſes $2\frac{4}{7}$. tertius denique 800. aur. per $1\frac{1}{2}$. menſes. Quantum ergo quiſque pro rata pecuniæ ſuæ, ac temporis portione ex lucro accipiet? Si cuiuſque pecunia per ſuum tempus multiplicetur, faciemus ex pecunia primi in ſuum tempus, 3000. ex pecunia ſecundi in ſuum tẽpus, 1800. ex pecunia tertij in ſuum tempus,

1200.

1200. Hi autem tres producti faciunt summã 6000. Sic ergo stabit exemplum.

Lucr. aur.				Lucr. aur.
6000. 1000.	3000?	fiunt		500. primi.
	1800?			300. secund.
	1200?			100. tertij.

Vbi vides prodijsse lucra singulorum, sicut in quæstione proponebãtur. Rectè ergò tempora duorum posteriorum explorata sunt.

6. Quatuor societatem inierunt biennio duraturam, lucratique sunt 10000. aur. Primus in initio societatis attulit 3000. aur. & post mẽsem octauũ transactũ, abstulit ex illis 1000. aureos. Vicesimo deinde mense inchoante exposuit rursum 1200. aur. Secundus à principio dedit 2400. aur. & post 6. menses elapsos abstulit 800. aur. sed ad initium mẽsis 16. denuo protulit 1400. aur. Tertius sub initium consortij exhibuit 2000. aur. transactisque 7. mensibus, totam pecuniam suam repetijt: sed mense 18. incipiente, iterum posuit 1600. aur. Quartus denique inchoante 7. mense exposuit 1800. aur. & post 4. menses finitos recepit 900. aur. sed ad initium mensis 17. rursus contulit 1500. aur. Quantum ergo quilibet ex cõmuni lucro pro ratione suæ pecuniæ, ac temporis recipiet? Hic diligenter explorandum est, quantam quisque pecuniam, & quanto tempore exposuerit, vt semper pecuniam per per tẽpus multiplicemus, &c. Quod vt planius fiat, exemplum propositum ita explicabimus. Quæst. 6.

Quoniam primus in principio cõsortij de-

dit 3000. aur. recepitq́; 1000. post 8. menses exactos, manifestum est, eum in communi negotiatione exposuisse 3000. aur. per 8. mẽses. Multiplicantes ergo 3000. per 8. faciem⁹ 24000. Et quia post 8. menses elapsos abstulit 1000. aur. certũ est remansisse in cõmuni consortio 2000. aur. vsq; ad finem 19. mensis, vbi nouam pecuniam contulit. Auferentes igitur 8. menses ex 19. remanent 11. menses, quibus exposuit tantum 2000. aur. & multiplicantes 2000. per 11. faciemus 22000. Post hæc, quoniam denuo attulit 1200. aur. ad initium 20. mensis vsq; ad finem secundi anni, liquet, si addamus hos 1200. aur. ad 2000. aur. eum in communi negotiatione per 5. re-reliquos menses duorum annorum, habuisse 3200. aur. Multiplicantes ergo 3200. per 5. faciemus 16000. Colligentes iam tres hosce productos 24000. 22000. 16000. in vnã summam, efficiemus 62000. qui numerus erit positio primi, productus ex pecunijs, & temporibus ipsius.

Rursus, quoniam secundus per 6. menses imposuit 2400. aur. propterea quòd elapso 6. mense, abstulit 800. aur. multiplicabimus 2400. per 6. faciemusq́; 14400. Quia vero ad principium 16. mensis nouam pecuniam dicitur exhibuisse, perspicuum est, eum per 9. menses à principio 7. mensis vsque ad finẽ 15. habuisse in consortio cõmuni 1600. aur. qui relinquuntur, subtractis 800. ex 2400. Multiplicantes igitur 1600. per 9. faciemus similiter 14400. Deinde, quia dicitur ad initium 16. mensis iterum posuisse 1400. aur. manifestum

nifeſtum eſt, hanc pecuniam expoſitam eſſe per reliquos 9. menſes duorum annorum, quibus ſi addantur aurei 1600. qui adhuc in communi negotiatione exponuntur, fient aurei 3000. qui per 9. illos vltimos menſes in communi vſu fuerunt. Multiplicantes ergo 3000. per 9. faciemus 27000. Collectis autem trib⁹ hiſce productis 14400. 14400. 27000. in vnam ſummam, efficiemus 55800. pro numero ſecundi producto ex pecunijs, & temporibus ipſius.

Poſt hæc, cum tertius per 7. menſes contulerit 2000. aur. quòd eos repetierit poſt 7. menſes elapſos; multiplicabimus 2000. per 7. efficiemusq́; 14000. Sed quia ad principiũ 18. menſis denuo exhibuit 1600. aur. multiplicabimus 1600. per 7. (tot enim menſes ex duobus annis ſuperſunt) faciemuſq́ue 11200. Collectis autẽ duobus hiſce productis 14000 11200. in vnã ſummam, procreabimus 25200. numerum ex pecunijs, ac temporibus tertij mercatoris productum.

Quia tandem quartus à principio 7. menſis per 4. mẽſes poſuit 1800. aur. multiplicabimus 1800. ꝑ 4. efficiemuſq́; 7200. Sed quia, finitis 4. menſibus, recepit 900. aur. relicti ſunt 900. aurei, qui fuerunt in negotiatione per 6. menſes à principio 11. menſis vſque ad finem 16. menſis, quando nouam pecuniam attulit. Multiplicantes ergo 900. per 6. faciemus 5400. Quoniam vero ſub principium 17. menſis poſuit iterum 1500. aur. vſque ad finẽ duorũ annorũ, additis 900. aur. qui adhuc in cõmuni vſu ſunt, fient 2400. Multiplicã-

tes ergo 2400. per 8. menſes reſiduos, faciemus 19200. Collectis autem tribus hiſce productis 7200. 5400. 19200. in vnam ſummam, efficiemus 31800. pro numero ex pecunijs, tẽporibusq́ue quarti mercatoris procreato.

Iam vero colligentes hos quatuor numeros 62000. 55800. 25200. 31800. qui ex ſingulorum pecunijs, ac tẽporibus producti ſunt, in vnam ſummam faciemus 174800. pro primo numero regulæ trium. In ſecundo autem loco erit lucrum commune, & in tertio numerus ex pecunijs, & temporibus cuiuſque procreatus, vt in 4. quæſtione dictum eſt. Ita ergo ſtabit exemplum.

174800. 10000. { 62000? 55800? 25200? 31800 }

fiunt { $3546\frac{1562}{1748}$. primi. $3192\frac{384}{1748}$. ſecundi. $1441\frac{1132}{1748}$. tertij. $1819\frac{388}{1748}$. quarti. }

Quæſt. 7. 7. Tres ineunt ſocietatem. Primus confert 400. aur. Secundus 300. aur. & 86. baioch. Tertius 1000. aur. Iul. 7. baioch. 9. In ipſa autem negotiatione vſi ſunt fortuna aduerſa, iacturamque fecerunt de tota ſumma 100. aureorum. Quantum ergo cuiuſlibet dánum? Reductis omnibus ad baiochos, fient pro primo 40000. baiochi: pro ſecundo 30086. pro tertio vero 100079. quorum omnium ſumma eſt 170165. Ita ergo ſtabit exemplum.

Baiochi

	Baioch.		Damn. baioc.
Si	170165.	dant	10000.

	Baioch.		Damn. baioc.
Quid	40000?	fiunt	$2350\frac{112250}{170165}$.
	30086?		$1768\frac{8280}{170165}$.
	100079?		$5881\frac{49635}{170165}$.

8. Tres societatem inierunt, Primus attulit 200. aur. eosque in societate reliquit 12. mensibus. Secundus contribuit 240. aur. Tertius aureum torquem, cuius pretium repetijt, post decem menses elapsos. Lucrum acquisitum fuit 138. aureorum. Facta autem debita distributione, primus habuit 60 aur. secundus 48. & tertius 30. Quot ergo mensibus reliquit secundus pecuniam collocatam in cōsortio, & quanti torques aureus æstimatus, vt dictæ portiones lucri cuilibet deberentur? Quaest. 8. Quoniam pecunia cuiusque per suum tempus multiplicari debet, multiplicabimus 200. aur. primi per 12. menses, faciemusque 2400. atque ex hoc numero illi prouenerunt 60. aur. Dic ergo, vt scias, ex quo secundus lucrum 48. aureorum acquisierit: Si 60. aur. prouenerunt ex 2400. ex quo prouenerunt aurei 48. vt hic vides.

60.	2400.	48?	fiunt	1920.

Inueniesq; 1920. qui numerus productus est ex 240. aur. secundi in suū tempus. Diuiso igitur numero dicto 1920. per 240. prodibunt menses 8. quibus pecunia secundi in negotiatione mansit. Rursus, vt scias, ex quo tertius lucrum 30. aureorum adeptus sit, dic. Si

dinem aureorum mihi ignotam. Finita tamen societate, lucrũ participarũt æqualiter. Quid ergo secundus & tertius in eam societatem contulerunt? Multiplicando 1000. aur. primi per 12. mẽses quibus eos in sodalitate reliquit, fient 12000. Ac tantundem debet fieri ex pecunia secundi in suum tempus, atq; ex pecunia tertij in suum tempus; quandoquidem æqualia lucra habere debent. Quoniam vero secũdus pecuniam suam 10. mensibus reliquit in negotiatione, si partiamur 12000. per 10. inueniemus pecuniam secundi fuisse 1200. aur. at si diuidamus per 6. menses, quibus tertius suam pecuniam exposuit, deprehendemus pecuniam tertij fuisse 2000. aur. Nam hac ratione ex pecunia cuiusq; in suum tempus producetur numerus 12000. qui tertium locum in regula trium occupabit; ac proinde æqualia lucra omnes tres habebũt, quodcunq; fuerit lucrum illud commune. Si enim lucrum commune fuisset 900. aur. & tres hi numeri 12000. 12000. 12000. qui ex singulorum pecunijs in sua tempora sunt producti, in vnã summam colligerentur, ita staret exemplum.

36000. 900. { 12000? 12000? 12000? } fiunt { 300. 300. 300. }

10. Tres in communi negotiatione lucrati sunt 190. aur. quos ita distribuerunt, vt portio primi tripla esset portionis secũdi, & quadrupla portionis tertij. Primus autem contulit per 12. menses 80. aur. Secundus suam pecuniam exposuit per 8. menses, & tertius per 4. Quæst. 10.

Quantum ergo quiſq; duorum poſteriorum contulit in hanc ſocietatem, & quid de lucro ſinguli acceperunt? Multiplica pecuniam primi, nempe 80. aur. per ſuum tempus, vt per 12. menſes; facieſq; 960. Huius numeri ſume $\frac{1}{3}$. nimirum 320. Item $\frac{1}{4}$. nempe 240. Atque hi numeri ſunt, qui produci debent ex pecunijs duorum poſteriorum in ſua tépora: quia hac ratione lucrum ſecundi erit $\frac{1}{3}$. lucri primi, & lucrum tertij erit $\frac{1}{4}$. eiuſdem, quemadmodum & numerus 320. ex quo lucrum ſecundo oritur, eſt $\frac{1}{3}$. numeri 960. ex quo lucrum primi gignitur, & numerus 240. quod parit lucrũ tertij, eſt $\frac{1}{4}$. eiuſdem numeri 960. Si igitur partiamur 320. per 8. menſes ſecundi inueniemus 40. aur. quos ſecundus poſuit: Si vero diuidamus 240. per 4. menſes tertij, producentur 60. aur. pro tertio. Nam hac ratione pecuniæ ſingulorum per ſua tempora multiplicatæ producunt numeros 960. 320. 240. quorum primus triplus eſt ſecundi, & quadruplus tertij. Ex quo fit, lucra eaſdem quoque proportiones habitura. Vt hic vides.

1520.	190.	960. 320. 240.	fiunt	120. 40. 30.	Lucra.

Queſt. 11. 11. Tres, inito conſortio, contulerunt in communem negotiationẽ 1520. aur. lucratiq; ſunt aur. 190. quos (habita ratione pecuniæ cuiuſq; quam poſuit) ita partiti inter ſe ſunt, vt primus haberet 120. ſecundus 40. Quid ergo tertius habuit, & quid quiſq; in ſocietatem

con-

contulerũt? Si lucrum tam primi, quàm secũdi ex toto lucro demas, relinquetur lucrum tertij 30. aur. Cognitis autem singulorũ lucris, dic. Si totum lucrum 190. aur. ortum est ex cõmuni pecunia 1520. aur. ex quo prouenit lucrũ primi 120. aur. & lucrum secundi 40. aur. & lucrum tertij 30. aur. Reperies enim primum attulisse 960. aur. secundum 320. & tertiũ 240. Vt hic vides.

190.	1520.	120?	fiunt	960. primi.
		40?		320. secundi.
		30?		240. tertij.

Examinabitur, si dicas. Si 1520. (quæ est summa pecuniarium, quas singuli contulerũt) lucrãtur 190. quid lucrabũtur 960. 320. & 240. Inuenies enim lucra 120. 40. & 30.

12. Tres, inita sodalitate, in negotiationem contulerunt 1520. aur. quibus lucrati sunt 190. aur. Primus, facta distributione, recepit 1080. aur. conflatos ex sua pecunia quã posuit, & lucro, quod illi obtigit. Similiter secũdus accepit 360. aur. & tertius 270. Quantũ ergo quisq; posuit, & quantũ est lucratus? Facta vna sũma ex pecunia, quam omnes posuerunt, & lucro cõmuni, quæ est 1710. Dic. Si 1710. pecunia omnium, & lucrũ, proueniũt ex 1520 pecunia omniũ, ex quo proueniũt 1080. qui numerus continet & pecuniam primi, & lucrum? & ex quo orientur, 360. quæ continent & pecuniam, & lucrũ secũdi? & ex quo numerus 270. producetur continens & pecuniam, & lucrũ tertij? Inuenies enim hoc modo pecunias, quas singuli posuerunt. vt hic manifestum est. Quæ. 12.

1710.

		1080?		960.	primi.
1710.	1520.	360?	fiunt	320.	secundi.
		270?		240.	tertij.

Ablata autem pecunia cuiusque ex numero, qui illi obtigit, relinquetur lucrum solũ. Ita deprehendes lucrum primi esse aur 120. secundi 40. & tertij 30.

Quæst. 13. 13. Duo in communi consortio lucrati sunt 200. aur. ex quibus primo obtigerunt 50. aur. secundus tamen duplo plus contulit, quàm primus, & præterea 8. aur. Quantum ergo vterq; exposuit? Quoniam primus lucratus est 50. aur. manifestum est, secundum, qui duplo plus posuit, lucratum esse 100. ac proinde reliquos 50. aur. qui ex toto lucro 200. aur. supersunt, esse lucrum 8. aureorum, quos præterea secundus attulit. Vt ergo habeas pecuniam, quam vterq; posuit, dic. Si 50. aurei residui proueniunt ex 8. aur. quos secundus præterea contribuit, ex quo producentur 50. aur. quos primus lucratus est, & ex quo 100. aur. quos lucratus est secundus? Reperies enim hac ratione primum posuisse 8. aureos, & secundũ 16. vt hic apparet.

50.	8.	50?	fiunt	8.
		100?		16.

Si igitur addas 8. ad 16. aur. secundi, facies 24. aur. quos secundus in eam sodalitatem cõtulit.

Examen huius rei erit, si 8. aur. & 24. quos ambo contribuerunt, in vnam summam colligas, quæ est 32. & dicas. Si 32. lucrati sunt 200. quid lucrabuntur 8. & quid 24? Deprehendes enim

enim lucrum primi esse 50. aur. & secundi 150. vt hic vides.

32.	200.	8?	fiunt	50.
		24?		150.

14. Duo contraxerunt societatem, quorũ primus exposuit 120. aur. & secundus 180. Assumpserunt autem procuratorem ea conditione, vt ex lucro acciperet 10. pro 100. Lucrum vero fuit 1000. aur. Quid ergo debuit habere procurator, & quid vterq; illorum? Dic. Si 100 dant 10. procuratori, quid dabunt 1000. inueniesque 100. aur. qui procuratori debentur in ratione 10. pro 100. Ablatis autem his 100. aur. ex toto lucro, hoc est, ex 1000. aur. remanent 900. aur. pro lucro amborũ. Dic ergo. Si 300. aur. quos ambo posuerunt, lucrati sunt 900. aur. quid lucrabuntur aurei 120. & quid 180. Veluti hic appositum est. Quæst. 14.

300.	900.	120?	fiunt	360.
		180?		540.

15. Tres inierunt societatem, lucratiq; sunt 1520. aur. Primus contulit 1080. aur. & secũdus 360. tertius autem tantam pecuniam exposuit, vt ei de lucro cederent 240. aur. Quid ergo hic tertius posuit, & quid duorum priorum quisque est lucratus? Subtrahe 240. aur. quos tertius lucratus est, à toto lucro 1520. aureorum, vt reliqui sint 1280. aur. pro lucro priorum duorum. Dic ergo. Si 1440. aur. quos primus & secundus exposuerunt, lucrantur 1280. aur. quid lucrabuntur 1080. aur. primi, & quid 360. aur. secundi? Inueniesque lucrum Quæst. 15.

primi

primi esse 960. & secundi 320. vt hic cernis.

1440. 1280. { 1080? 360? } fiunt { 960. 320. }

Ita enim omnium lucra conficiēt 1520. aur. Vt autem habeas pecuniam à tertio expositã, dic. Si lucrum priorum duorum 1280. aur. prouenit ex 1440. aur. quos in societatem attulerunt, ex quo proueniet lucrum tertij 240. aur? inuenies q; 270. aur. vt hic vides.

1280. 1440. 240? fiunt 270.

Quæst. 16. 16. Tres exposuerunt æquales pecuniæ sũmas, lucratiq; sunt 1000. aur. in vno anno. Primus reliquit suam pecuniam in consortio 7. mensibus: secundus suam repetijt post 6. menses: tertius autem suam vsq; ad finem anni exposuit. Quid ergo quisq; de lucro accipiet? Collectis omnibus mensibus, quibus singuli suas pecunias exposuerunt, vt fiat summa 25. dic. Si 25. lucrantur 1000. quid lucrabuntur 7. menses, & quid 6. & quid 12? quemadmodum hic factum est.

25. 1000. { 7? 6? 12? } fiunt { 280. 240. 480. }

Verum hoc esse perspicuum est, cum omnium lucra efficiant 1000. aur. quos quidem dicebantur esse lucrati.

Idem tamen hoc modo examinabis. Finge singulos exposuisse 100. aur. quos per tempus cuiusq; multiplica, vt fiant 700. 600. 1200. Collectis autem hisce numeris in vnam summam, quæ est 2500. dic. Si 2500. lucrantur

tur 1000. quid lucrabuntur 700. 600. & 1200? Inuenies enim eadem lucra, quæ prius, vt hic apparet.

2500. 1000. { 700? 600? 1200? } fiunt { 280. 240. 480. }

17. Quatuor simul lucrati sunt 340. aur. quos ita inter se, habita ratione pecuniarum collatarum, partiti sunt, vt quoties secundus habuit 5. toties tertius habuerit 9. quoties autem tertius habuit 7. toties quartus habuerit 11. quoties denique quartus habuit 9. toties primus habuerit 13. Primus autem contulit 286. aur. quid ergo alij tres exposuerunt, & quid singuli ex lucro reportarunt? Hic exprimuntur proportiones lucrorũ, atq; adeo pecuniarum, ex quibus lucra proueniunt. Sunt enim lucra pecunijs expositis proportionalia. Quoniam igitur primus toties habiturus est 13. quoties quartus 9. erit proportio pecuniarium expositarum eadem, quæ 13. ad 9. propterea quod idẽ numerus multiplicãs 13. & 9. producit pecunias vtriusq; cũ toties in illa cõtineri debeant 13. quoties 9. in hac. Dic ergo. Si 13. dant 286. aur. quos primus posuit, quid dabũt 9? inueniesq; 198. aur. pro collatione quarti, vt hic cernis. Quæst. 17.

13. 286. 9? fiunt 198.

Vbi vides, toties contineri 9. in 198. quoties 13. in 286.

Quoniam vero quartus dicitur habiturus toties 11. quoties tertius 7. erit proportio 198, nempe pecuniæ quarti, ad pecuniam tertij,

quæ

quæ 11. ad 7. Dic ergo. Si 11. dant 198. quid 7. reperiesque collationem tertij 126. aur. vt hic constat.

11. 198. 7? fiunt 126.

Vbi etiam liquet, toties contineri 7. in 126. quoties 11. in 198.

Rursus quia tertius toties debet habere 9. quoties secundus 5. erit proportio 126. nimirũ pecuniæ tertij, ad pecuniam secundi, quæ 9. ad 5. Dic ergo. Si 9. dãt 126. quid 5? inueniesq; collationem secundi 70. aur. vt hic patet.

9. 126 5? fiunt 70.

Vbi etiam apparet, toties reperiri 5. in 70. quoties 9. in 126.

Habitis autem pecunijs, quas singuli contribuunt, inueniemus lucra eorum, sicuti in alijs societatibus. Collectis enim omnium pecunijs in summam 680. dicemus. Si 680. lucrantur 340. quid lucrabuntur 286. 70. 126. 198. quos primus, secundus, tertius, ac quartus posuit? veluti hic vides.

680.	340.	286?	fiunt	143. primi.
		70?		35. secundi.
		126?		63. tertij.
		198?		99. quarti.

Vbi quidem liquido cernis, omnia lucra facere 340. & toties contineri 13. in 143. quoties 9. in 99. & toties 5. in 35. quoties 9. in 63. Item toties 7. in 63. quoties 11. in 99.

Quæst. 18. 18. Tres partiri inter se volunt 760. aur. ea conditione, vt quoties primus habet 10. toties secun-

ſecundus habeat 7.& tertius 2. Quantum ergo ſinguli ſunt accepturi? Iunge ſimul 10.7.& 2. vt habeas 19. Deinde dic. Si 19. dant 760. quid dabunt 10.7.& 2. veluti hic vides.

19.	760.	10. 7. 2.	fiunt	400. primi. 280. ſecundi. 80. tertij.

19. Quatuor partiri inter ſe volũt 785. aur. ea lege, vt quoties primus habet 10. toties ſecundus habeat 7. quoties autem ſecundus habet 14. toties tertius habeat 3. quoties deniq; tertius habet 12. toties quartus habeat 9. Quid ergo quiſq; accipiet? Vt facilior reddatur operatio, incipiendum erit ab vltimo, nempe à quarto, qui ponatur habere ſemel 9. Habebit igitur tertius ſemel etiam 12. Quia vero quoties tertius habet 3. toties ſecundus habere debet 14. ſi diuidamus 12. numerũ tertij, per 3. inueniemus Quotientẽ 4. qui indicabit in 12. quater contineri 3. Multiplicabimus igitur 14. per dictum Quotientem 4. vt inueniamus 56. numerum ſecundi, in quo toties 14. continentur; quoties 3. in 12. Et quoniã quoties ſecũdus habet 7. toties primus habere debet 10. ſi partiamur 56. numerũ ſecundi, per 7. inueniemus Quotientem 8. qui indicat, in 56. octies contineri 7. Multiplicabimus igitur 10. per Quotientem hunc 8. vt producatur numerus primi 80. in quo toties 10. continentur, quoties 7. in 56. Atque ita partes numeri dati habere debent proportiones horum numerorũ 80. 56. 12. 9. Ita enim toties primus habebit 10. quoties ſecũdus 7. Et toties ſecun- Quæſt. 19.

dus 14. quoties tertius 3. Et quoties tertius 12. toties quart⁹ 9. Collectis igitur illis numeris in vnam summã, quæ erit 157. Dic. Si 157. dant 785. quid dabunt 80. 56. 12. & 9? vt hic vides.

157.	785.	80?	fiunt	400. Primi.
		56?		280. Secundi.
		12?		60. Tertij.
		9?		45. Quarti.

Alio modo ita soluetur eadẽ quæstio proposita. Quoniam cum primus habet 10. secũdus habet 7. Ponemus 10. pro primo, & 7. pro secundo. Deinde, quia cum secundus habet 14. tertius habet 3. dicemus. Si 14. secundi sunt 7. quid erunt 3. tertij? Inueniemusque $1\frac{1}{2}$. atque talem proportionem habebit positio secundi ad positionem tertij, qualem 7. ad $1\frac{1}{2}$. hoc est, toties erunt 14. in 7. quoties 3. in $1\frac{1}{2}$. Rursus, quia cum tertius habet 12. quartus habet 9. dicemus. Si 12. tertij sunt $1\frac{1}{2}$. quid erunt 9. quarti? inueniemusque $1\frac{1}{8}$. atque talem proportionem habebit positio tertij ad positionem quarti, qualem $1\frac{1}{2}$. ad $1\frac{1}{8}$. hoc est, toties erunt 12. in $1\frac{1}{2}$. quoties 9. in $1\frac{1}{8}$. Collectis iam his numeris 10. 7. $1\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{8}$. in vnam summam, efficiemus $19\frac{5}{8}$. Quare dicemus. Si $19\frac{5}{8}$. dant 785. quid dabunt 10. 7. $1\frac{1}{2}$. & $1\frac{1}{8}$. vt hic vides.

$19\frac{5}{8}$.	785.	10?	fiunt	400. primi.
		7?		280. secundi.
		$1\frac{1}{2}$?		60. tertij.
		$1\frac{1}{8}$?		45. quarti.

Quęst. 20. 20. Quatuor duces, sex signiferi, & 100. mili-

milites in direptione cuiusdam vrbis irruerunt in domum quandam, vbi repererunt 72400. aur. quos inter se ita partiti sunt, vt quoties quilibet dux acceperit 8. toties quilibet signifer acceperit 5. & quilibet miles 3. Quid ergo cuilibet ex illa præda obuenit? Multiplica numerum ducum, id est, 4. per 8. nempe per numerum, quem toties quilibet dux debet habere, quoties alij 5. & 3. efficiesq; 32. Similiter multiplica 6. numerum signiferorum per 5. & 100. numerum militum per 3. efficiesq; 30. & 300. Iunctis simul tribus his numeris 32. 30. 300. vt fiant 362. Dic. Si 362. dant 72400. quid dabunt 32. 30. & 300. vt hic vides.

362.	72400.	32?	fiunt	6400.
		30?		6000.
		300?		60000.

Itaq; quatuor duces acceperunt ex illa prǽda 6400. aur. at 6. signiferi 6000. & 100. milites 60000. qui omnes conficiunt summam aureorum inuentam 72400. Iam vero, si partiamur aureos ducum 6400. per 4. numerum ducum reperiemus quẽlibet habuisse 1600. aur. Item si aureos signiferorum diuidamus per 6. deprehendemus cuilibet obtigisse 1000. aur. Si denique aureos militum per 100. distribuamus, inueniemus singulos accepisse 600. aur. vbi manifeste vides, toties 8. contineri in 1600. quoties 5. in 1000. & 3. in 600. nimirum ducenties.

21. Quidam extremum spiritum agens, cui filia erat, & filius, qui in bello dicebatur occubuisse, ita hæreditatem 18088. aureorum Quæst. 21.

distribuendam inter vxorem, & filiam reliquit, vt vxor haberet $\frac{2}{3}$. filia autem $\frac{1}{3}$. sed si forte filius rediret, vt filius $\frac{2}{3}$. haberet. Accidit autem, vt filius reuerteretur. Qua igitur ratione dicta hæreditas diuidenda est, vt voluntati testatoris satisfiat? Certum est, quæstionem hanc non posse intelligi, vt verba sonant. Nam si filius accipiat $\frac{2}{3}$. non poterit vxor habere $\frac{2}{3}$.& filia $\frac{1}{3}$.Quare omnes Arithmetici voluntatem testatoris interpretātur, vt voluerit, filium duplo plus debere habere, quàm vxorem, & vxorem duplo plus, quàm filiam. Id quod proportio harum minutiarum $\frac{2}{3}$. $\frac{1}{3}$. quæ dupla est, (continet enim minutia $\frac{2}{3}$. minutiam $\frac{1}{3}$. bis.) indicare videtur. Itaq; numerus 18088. secandus est in tres partes, ita vt prima contineat secundam bis, & secũda tertiam etiam bis, hoc est, quæ habeant continuam proportionem duplam. quod hoc modo fiet. Pone tertiam esse 1. Erit ergo secunda 2 & prima 4. quæ omnes faciunt 7. Dic igitur. Si 7. dant 18088. quid dabunt 4. 2. & 1? vt hic vides.

7.	18088.	4? 2? 1?	fiunt	10336. filij. 5168. vxoris. 2584. filiæ.

Quæst. 22. 22. Tres crumenam inuenerunt cum 3042. aur. quos ita inter se distribuerũt. Primus accepit $\frac{1}{2}$. secundus $\frac{1}{3}$. & tertius $\frac{1}{4}$. Quid ergo quisq; accepit? Hic etiam perspicuũ est, quæstionem non posse intelligi, vt sonat. Si namq; primus accepisset $\frac{1}{2}$. & secundus $\frac{1}{3}$. non potuisset tertius accipere $\frac{1}{4}$. Nam hæ tres minutiæ effi-

efficiunt plus, quàm integrum, nempe $\frac{13}{12}$. Quare ſenſus eſt, vt datus numerus diſtribuatur in tres partes, quæ eaſdem proportiones inter ſe habeant, quas hæ minutiæ $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. Quod vt fiat, inueniatur numerus à denominatoribus numeratus. Minimus autem hic numerus eſt 12. inuentus per ea, quæ cap. 10. ſcripſimus. Ex hoc numero cape $\frac{1}{2}$. nempe 6. Item $\frac{1}{3}$. nempe 4. Item $\frac{1}{4}$. nempe 3. quas partes ſimul adde, vt habeas 13. Dic ergo. Si 13. dant 3042. quid dabunt 6.4.& 3? vt hic cernis.

13.	3042.	6?	fiunt	1404. primi.
		4?		936. ſecundi.
		3?		702. tertij.

Examen ita fiet. Reduc datas minutias ad eandem denominationem, vt ad $\frac{6}{12}$. $\frac{4}{12}$. $\frac{3}{12}$. Habebunt enim hæ minutiæ eaſdem proportiones, quas numeratores habent. Eaſdem autem habent tres numeri inuenti 1404.936.702. vt patet.

23. Tres inuento loculo cum 1407. aur. ita diſtributionem fecerunt. Primus accepit $\frac{1}{2}$. ſecundus $\frac{3}{5}$, tertius $\frac{8}{11}$. quid ergo quiſq; accepit? Hic etiam ſenſus eſt, vt datus numerus in tres partes ſecetur datis minutijs proportionales: alias impoſſibilis quæſtio foret. Inuento igitur, ex cap. 10. minimo numero 110. dictas minutias continente, ſume eius dimidium 55. & tres quintas 66. & octo vndecimas 80. eaſq; in vnam ſummam 201. collige, ac dic. Si 201. dant 1407. quid dabunt 55. 66. & 80? vt hic apparet. Quæſt. 23.

201. 1407. { 55? 66? 80? } fiunt { 385. primi. 462. secundi. 560. tertij.

Examen fiet, vt in antecedente quæstione. Reductis enim datis minutijs ad eandem denominationem, vt ad $\frac{55}{110}$. $\frac{66}{110}$. $\frac{80}{110}$. habebũt tres numeri inuenti easdẽ proportiones; quas hæ minutiæ, nempe earum numeratores, habent, vt constat.

Quęst. 24. 24. Quatuor partiri inter se volunt 396. aur. ita vt primus habeat $\frac{1}{2}$. & præterea 10. secundus $\frac{3}{5}$. minus 20. tertius $\frac{1}{3}$. & præterea 8. quartus denique $\frac{1}{4}$. minus 6. quantum ergo quisque accipiet? In huiusmodi quæstionibus aufer ex tota summa numeros, qui accipi debent vltra partes dictas, & alios, qui deesse debent dictis partibus, ad eandem summam adijce. Vt hic aufer 10. & 8. vt remaneãt 378. adde rursus 20. & 6. fiunt 404. Deinde inuento minimo numero 60. continente datas minutias, cuius $\frac{1}{2}$. est 30. & $\frac{3}{5}$. 36. & $\frac{1}{3}$. 20. & $\frac{1}{4}$. 15. quæ omnes faciunt 101. Dic ergo. Si 101. dant 404. (qui numerus productus est ex additione & subtractione datorum numerorum ex tota summa 396.) quid dabunt 30. 36. 20. & 15? vt hic vides.

101. 404. { 30? 36? 20? 15? } fiunt { 120. primi. 144. secundi, 80. tertij. 60. quarti.

Quatuor igitur hi numeri inuenti proportiones habent easdem, quas datæ minutiæ, sed in

vnam

vnam summam collecti faciunt 404. non autem 396. vt quæstio proponit. Quòd si primo addas 10. vt fiant 130. & à secundo auferas 20. vt relinquantur 124. tertio item adijcias 8. vt fiant 88. & à quarto demum auferas 6. vt remaneant 54. efficient hi quatuor numeri 396. Vt autem habeant dictas proportiones, auferendi erunt prius numeri, & addendi, qui additi sunt, & subtracti: Ita vt vere 130. ad 124. proportionem habeant, quam $\frac{1}{2}$. ad $\frac{3}{7}$. si prius 10. detrahantur ex illo, & huic adijciantur 20. vt recte dicatur numerus 130. continere $\frac{1}{2}$. & præterea 10. numerus vero 124. continere $\frac{3}{7}$. minus 20. &c.

25. Est cisterna habens in imo fundo tres fistulas inæquales: maxima reserata, effluit tota aqua in 2. horis; media autem aperta, effluit tota aqua in 3. horis; minima denique aperta effluit tota aqua in 6. horis. Quanto ergo tempore, reseratis omnibus tribus fistulis, tota aqua effluet, si per singulas fistulas à principio vsque ad finem aqua semper eodem modo effluat? Sumpto minimo numero, quem tempora in quæstione expressa, nempe horæ 2. 3. & 6. metiantur, qui hic est 6. dic. Si maxima fistula in 2. horis vnam cisternam exhaurit, quot cisternas in 6. horis exhauriet? inueniesque 3. Item si media fistula vnam cisternam exhaurit in 3. horis, quot cisternas in 6. horis exhauriet? inueniesq; 2. Item si minima fistula in 6. horis vnam cisternam exhaurit quot cisternas exhauriet in 6. horis? inueniesque 1. vt hic vides. Quæst. 25.

Horæ.	Ciſterna.	Horæ	Ciſternæ.
2. 3. 6.	1.	6?	3. 2. 1.

Collectis iam in vnum his tribus inuentis numeris 3. 2. 1. vt fiant 6. dic. Si ſex ciſternæ euacuantur in 6. horis, quanto tempore 1. euacuabitur? inuenieſq; in vna hora. Id quod hac ratione examinabis. Si maxima fiſtula exhaurit totam ciſternam in 2. horis, & media in 3. & minima in 6. quantam partem ciſternæ exhaurient ſingulæ fiſtulæ in 1. hora? veluti hic appoſitum eſt.

Horæ.	Ciſterna.	Hora.	Ciſterna.
2. 3. 6.	1.	1?	$\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{6}$.

Inuenies enim maximam fiſtulam euacuare $\frac{1}{2}$. ciſternæ, & mediam $\frac{1}{3}$. & minimam $\frac{1}{6}$. quæ omnes partes efficiunt vnam integram ciſternam.

Eadem hæc quæſtio ita proponi poteſt. Eſt ciſterna habens in ſummitate tres fiſtulas inæquales: maxima replet ciſternam in 2. horis, media in 3. & minima in 6. quanto ergo tempore omnes ſimul ciſternam implebunt? Inuenies enim 1. horam.

Pari ratione ita poteſt proponi. Sunt tres artifices: primus abſoluit opus quoddam in 2. annis, ſecundus in 3. & tertius in 6. quanto ergo tempore omnes ſimul idem opus perficiẽt, Inuenies enim 1. annum.

Cæte-

Cæterum huiusmodi quæstiones solui etiã possunt hoc pacto. Inuestigetur per regulam trium, quantum aquæ singulæ fistulæ exhauriant in 1. hora, tresque numeri inuenti in vnam summam colligantur. Nam si hæc summa fuerit 1. requiritur 1. hora, vt omnes fistulæ totam cisternam euacuent: si vero non fuerit 1, inuenietur tempus requisitum per regulam trium, vt in hoc exemplo erit manifestum. Sunt tres artifices; primus absoluit opus quoddam in 6. annis, secundus in 9. & terrius in 18. Quanto ergo tempore omnes simul idem opus perficient? Dic. Si primus in 6. annis absoluit 1. opus. & secundus in 9. & tertius in 18. quantum absoluet quilibet in 1. anno? vt hic vides. Alia solutio huius quæstion.

Anni.	Opus.	Ann.		Operis
6.				$\frac{1}{6}$.primi.
9.	1.	1?	fiunt	$\frac{1}{9}$.secundi.
18.				$\frac{1}{18}$.tertij.

Efficiunt autem tres numeri inuenti $\frac{1}{3}$. Dic ergo. Si $\frac{1}{3}$. operis requirit 1. annum, quot annos requiret 1. opus inueniesq; 3. annos. Quod examiuabis, vt supra, veluti hic vides.

Anni.	Opus.	Anni.		
6.				$\frac{1}{2}$. prim.
9.	1.	3?	fiunt	$\frac{1}{3}$.secund.
18.				$\frac{1}{6}$.tert.

Inuenies enim primum in 3. annis absoluere $\frac{1}{2}$. operis secundum $\frac{1}{3}$. & tertium $\frac{1}{6}$. quæ omnes partes efficiunt 1.

Si prius exemplum hac arte explicare

tur, prima ſtatim operatione ſcopus attingeretur: quia in 1. hora tota ciſterna euacuatur, vt conſtat ex operatione axaminis dicti exempli.

Quęſt.26.

26. Eſt ciſterna habens fiſtulam in orificio, per quam impletur in 4. horis: habet autem in imo fundo aliam fiſtulam, per quam in 6. euacuatur. Si ergo continuè influat aqua, & effluat, quanto tempore ciſterna replebitur. Primum inueſtigare oportet, quanta pars ciſternæ (poſita illa conditione) in 1. hora impleatur; quod hoc modo fiet: Si in 4. horis 1. ciſterna impletur, quantum implebitur in 1. hora? Inuenies autem $\frac{1}{4}$. ciſternæ. Rurſus. Si in 6. horis 1. ciſterna exhauritur, quantum euacuabitur in 1. hora? Inuenies autem $\frac{1}{6}$. ciſternæ: Si ergo auferas $\frac{1}{6}$. ex $\frac{1}{4}$. remanebit $\frac{1}{12}$. ciſternæ: ac tanta portio ciſternæ implebitur in 1. hora. Dic ergo. Si $\frac{1}{12}$. ciſternæ requirit vnam horam, quid requiret 1. ciſterna? Inueniesque 12. horas. Atque in tot horis ciſterna tota implebitur. Quod hac ratione examinabis verum eſſe. Si in 4. horis impletur 1. ciſterna, in 12. horis quot ciſternæ implebuntur? Inuenies autē 3. ciſternas. Item ſi in 6. horis euacuatur 1. ciſterna, in 12. horis quot ciſternæ euacuabuntur? Inuenies autem 2. ciſternas, quas ſi auferas ex 3. inuentis, remanebit 1. ciſterna plena.

Quod ſi quis dicat: Ciſterna per fiſtulam ſuperiorem impletur in 3. horis, per inferiorem euacuatur in 8. hor. eodem modo ſoluetur quæſtio, ſi dicas. Si in 3. horis 1. ciſterna impletur, quantum implebitur in 1. hora?

Inue-

Inuenies autem $\frac{1}{3}$. cisternæ. Item si in 8. horis vna cisterna euacuatur, quantum euacuabitur in 1. hora? Inuenies autem $\frac{1}{8}$. cisternæ. Si ergo demas $\frac{1}{8}$. ex $\frac{1}{3}$. remanebūt $\frac{5}{24}$. ac tanta portio cisternæ implebitur in 1. hora. Dic ergo. Si $\frac{5}{24}$. cisternæ requirunt 1. horam, quid requiret 1. cisterna? Inueniesque $4\frac{4}{5}$. hor. quo tempore tota cisterna implebitur. Quod ita probabis. Si in 3. hor. impletur 1. cisterna, in $4\frac{4}{5}$. hor. quot cisternæ replebuntur? Inuenies autem $1\frac{3}{5}$. Item si in 8. horis euacuatur vna cisterna, in $4\frac{4}{5}$. hor. quot cisternæ euacuabuntur? Inuenies autem $\frac{3}{5}$. quas si ex $1\frac{3}{5}$. auferas, remanebit 1. cisterna plena.

Breuius fortassis huiusmodi quæstiones soluentur, si quæratur, quanta portio cisternæ impleatur in illis horis, in quibus tota impleretur, si nihil efflueret. Quod ita fiet in priori quæstione. Dic. Si 6. horæ 1. cisternam euacuant, quantum euacuabunt 4. horæ? inueniesque $\frac{2}{3}$. quas si ex 1. auferas (ponimus enim 1. cisternam 4. horis impleri, si nihil efflueret) remanebit $\frac{1}{3}$. quæ 4. horis implebitur. Dic igitur rursus. Si $\frac{1}{3}$. cisternæ requirit 4. horas, quid requiret 1. cisterna? Inueniesque 12. horas, vt prius. *Alia solutio huius quæstionis*

In posteriori vero quæstione dic. Si 8. horæ 1. cisternam exhauriunt, quantum exhaurient 3. horæ? inueniesque $\frac{3}{8}$. quas si demas ex 1. (ponimus enim 1. cisternam 3. horis impleri, si nihil efflueret) remanebunt $\frac{5}{8}$. quæ 3. horis implebuntur. Dic ergo rursus. Si $\frac{5}{8}$. cisternæ exposcunt 3. horas, quid exposcet 1. cisterna? inueniesq; $4\frac{4}{5}$. horas, vt prius.

REGV-

REGVLA ALLIGATIONIS.

CAP. XXI.

Regula alligationis quid.

SOlent nonnunquam Arithmetici varias merces variorum pretiorum miſcere, ita vt, ſtatuto quodam pretio medio, omnes eo emantur; quod quidem efficiunt regula quadam, quam regulam alligationis dicunt, eo quod variæ merces alligentur quodammodo ad vnum pretium, vt ex ſequentibus exemplis perſpicuum fiet.

Quæſt. 1.

1. Duo genera vini ſunt: menſura 1. primi conſtat 20. baioch. at mẽſura 1. ſecundi venditur 12. baioch. Quãtũ ergo ex vtroque ſumẽdum eſt, vt mẽſura 1. valeat 15. baioch? Pone vnũ pretiũ ſub altero, & ad ſiniſtrã illorum colloca pretium ſtatutum, quod medium eſt inter data duo pretia. Deinde cõfer vtrunque pretium datum cum ſtatuto pretio, differentiamque vtriuſque pone ad dexteram pretiorum, alternatim tamen, hoc eſt, differen-

Regula alligationis quomodo fiat.

Pretium medium.	Pretia.	Differentiæ.
	20.	3.
15.		
	12.	5.
		8.
	Summa differentiarũ.	

ferentiam maioris pretij iuxta minus pretiũ, & differentiam minoris iuxta maius: atque has differentias in vnam summam collige, vt in exemplo vides.

Post hæc instituе regulam trium bis, ita vt summa differentiarum primum locum occupet; mensura vero 1. secundum; & vtraque differentia tertium, veluti hic cernis:

8. 1. { 3? 5? } fiunt { $\frac{3}{8}$. primi. $\frac{5}{8}$. secundi.

Dic ergo. Si summa differentiarum 8. dat 1. mensuram, quid dabunt singulæ differentiæ 3. & 5? Inuenies enim ex primo vino accipiendas esse $\frac{3}{8}$. vnius mensuræ, ex secundo vero $\frac{5}{8}$. atque ita fiet 1. mensura ex vtroque constans 15. baiochis. Quod ita probabis. Dic. Si 1. mensura primi vini valet 20. baioch. quid valebunt $\frac{3}{8}$? Item, si 1. mensura secũdi vini valet 12. baioch. quid valebunt $\frac{5}{8}$? vt hic cernis.

1.	20.	$\frac{3}{8}$?	fiunt	$7\frac{1}{2}$.
1.	12.	$\frac{5}{8}$?	fiunt	$7\frac{1}{2}$.

Inuenies enim duo pretia efficere 15. baiochos, quemadmodum proponitur.

2. Sunt duo genera argenti non puri. Primi libra 1. valet aur. 30. alterius libra 1. valet aur. 24. Vt ergo lib. 1. valeat aur. 28. quantum ex vtroque argento sumendum est? Facta alligatione, vt in præcedenti quæstione, dic. Si summa differentiarum 6. dat 1. lib. quid dabunt singulæ differentiæ 4. & 2. vt hic vides. Quæst. 2.

6. 1.

	Pretia.		Differentiæ.
Pretium medium.		30.	4.
	28.		
		24.	2.
			6.
	Summa differentiarum		

6. 1. $\left\{\begin{matrix}4?\\2?\end{matrix}\right\}$ fiunt $\left\{\begin{matrix}\frac{2}{3}.\ \text{primi.}\\\frac{1}{3}.\ \text{secundi.}\end{matrix}\right.$

Hoc enim modo habebis 1. lib. ex vtroque argento constantem 28. aureis, vt examines, dic. Si 1. lib. argenti prioris valet aur. 30. quid valebunt $\frac{2}{3}$. vnius libræ? Item si 1. lib. posterioris argenti valet 24. aur. quid valebit $\frac{1}{3}$? vt hic apparet.

1.	30.	$\frac{2}{3}$?	fiunt	20.
1.	24.	$\frac{1}{3}$?	fiunt	8.

Atque ita 1. lib. constabit 28. aur. vt proponitur.

Quæst. 3. 3. Libra 1. piperis valet 4. Iul. Libra 1. garyophilli 3. Iul. Libra 1. cinnamomi 6. Iul. Libra 1. croci 10. Iul. Libra 1. zingiberis 8. Iul. Quantum ergo ex quolibet accipiendum est, vt 1. libra constet 7. Iulijs? Quando plures res proponuntur alligandæ, varijs modis fieri potest alligatio; dummodo quælibet semel saltem alligetur. Potest enim quodlibet pretium cum quolibet alio, vel cum pluribus

Nota.

etiam

tiam alligari ad pretium medium, ita tamē, t statutum pretium sit medium inter duo, uæ alligantur ad ipsum, vel certè alteri il- orum æquale: vt in hoc exemplo apparebit, uod varijs alligationibus explicabimus.

Varijs modis fieri posse alligationē eiusdem exēpli.

Primo ergo alligabimus pretia piperis, & ingiberis ad pretium medium, quorum dif- eren- ę sunt & 1. lter- atim ollo- atæ. ein-- e pre- a ga- oph. cro- , quo i dif- rētiæ

Pretium medium.		Pretia.	Differentiæ.	
7.	piper.	4.	1.	
	garyoph.	3.	3.	
	cinnam.	6.	1.	
	crocus.	10.	4.	
	Zingib.	8.	3.	1.
			13.	
	Summa differentiarum.			

nt 4. & 3. alternatim quoque positæ. Deni- ie quia superest solum cinnam. alligabimus us pretium cum pretio Zingib. exempli atia, quorum differentiæ sunt 1. & 1. alter- tim etiam scriptæ. Omnium differentiarū mma est 13. Differentiæ autem è regione ingib. faciunt 4. Semper enim differentiæ ures è regione eiusdem pretij positæ colli- ndæ sunt in vnam summam. Dic iam. Si mma differentiarum 13. dat dat 1. lib. quid bunt singulæ differentiæ 1. 3. 1. 4. 4? vt hic des.

Quid sit faciendū, quando plures differentiæ ponūtur è regione eiusdem pretij.

13.

Pretium medium.	Pretia.		Differentiæ.
	30.		4.
	28.		
	24.		2.
			6.
	Summa differentiarum		

6. 1. { 4? / 2? } fiunt { $\frac{2}{3}$. primi. / $\frac{1}{3}$. secundi. }

Hoc enim modo habebis 1. lib. ex vtroque argento constantem 28. aureis, vt examines, dic. Si 1. lib. argenti prioris valet aur. 30, quid valebunt $\frac{2}{3}$. vnius libræ? Item si 1. lib. posterioris argenti valet 24. aur. quid valebit $\frac{1}{3}$? vt hic apparet.

1.	30.	$\frac{2}{3}$?	fiunt	20.
1.	24.	$\frac{1}{3}$?	fiunt	8.

Atque ita 1. lib. constabit 28. aur. vt proponitur.

Quæst. 3. 3. Libra 1. piperis valet 4. Iul. Libra 1. garyophilli 3. Iul. Libra 1. cinnamomi 6. Iul. Libra 1. croci 10. Iul. Libra 1. zingiberis 8. Iul. Quantum ergo ex quolibet accipiendum est, vt 1. libra constet 7. Iulijs? Quando plures res proponuntur alligandæ, varijs modis fieri potest alligatio, dummodo quælibet semel saltem alligetur. Potest enim quodlibet pretium cum quolibet alio, vel cum pluribus etiam

Nota.

etiam alligari ad pretium medium, ita tamē, vt statutum pretium sit medium inter duo, quæ alligantur ad ipsum, vel certè alteri illorum æquale: vt in hoc exemplo apparebit, quod varijs alligationibus explicabimus. Varijs modis fieri posse alligationē eiusdem exēpli.

Primo ergo alligabimus pretia piperis, & zingiberis ad pretium medium, quorum differentię sunt 3. & 1. alternatim collocatæ. Deinde pretia garyoph. & croci, quorū differētiæ

Pretium medium.	Pretia.		Differentiæ.	
7.	piper.	4.	1.	
	garyoph.	3.	3.	
	cinnam.	6.	1.	
	crocus.	10.	4.	
	Zingib.	8.	3.	1.
			13.	
	Summa differentiarum.			

sunt 4. & 3. alternatim quoque positæ. Denique quia superest solum cinnam. alligabimus eius pretium cum pretio Zingib. exempli gratia, quorum differentiæ sunt 1. & 1. alternatim etiam scriptæ. Omnium differentiarū summa est 13. Differentiæ autem è regione Zingib. faciunt 4. Semper enim differentiæ plures è regione eiusdem pretij positæ colligendæ sunt in vnam summam. Dic iam. Si summa differentiarum 13. dat dat 1. lib. quid dabunt singulæ differentiæ 1. 3. 1. 4. 4? vt hic vides. Quid sit faciendū, quando plures differentiæ ponūtur è regione eiusdem pretij.

13.	1.	1?	fiunt	$\frac{1}{13}$.pip.
		3?		$\frac{3}{13}$.garyoph.
		1?		$\frac{1}{13}$.cinnam.
		4?		$\frac{4}{13}$.croc.
		4?		$\frac{4}{13}$ zingib.

Hac ratione habebis 1. lib. ex omnibus, quæ constet 7. Iul. Vt examines, dic. Si 1. lib. piperis valet 4. Iul. quid valebit $\frac{1}{13}$? Item, si 1. lib. garioph. valet 3. Iul. quid valebunt $\frac{3}{13}$? Item, si 1. lib. cinnam. valet 6. Iul. quid valebit $\frac{1}{13}$? Item si 1. lib. croci valet 10. Iul. quid valebunt $\frac{4}{13}$? Item si 1. lib. zingib. valet 8. Iul. quid valebunt $\frac{4}{13}$? veluti hic cernis.

1.	4.	quid	$\frac{1}{13}$?	fiunt	$\frac{4}{13}$.pip.
	3.		$\frac{3}{13}$?		$\frac{9}{13}$.garyoph.
	6.		$\frac{1}{13}$?		$\frac{6}{13}$.cinnam.
	10.		$\frac{4}{13}$?		3 $\frac{1}{13}$.croc.
	8.		$\frac{5}{13}$?		2 $\frac{6}{13}$.zingib.

Inueniesq; omnia pretia efficere 7. Iul. vt proponitur.

Alia alligatio huius 3. quæstionis.

Alio modo fiet alligatio, si pretia piperis, & zingib. alligentur ad pretium medium: Itẽ pretia piperis, & croci. Deinde pretia garyoph. & zingib. & rursus pretia garyoph. & croci. Postremo pretia cinnam. & croci: Itẽ pretia cinnam. & zingib. vt in hoc apposito exemplo factum est. Neque vero plures alligationes fieri possunt in hoc exemplo. Nam pretia piperis, garyoph. & cinnam. inter se alligari non possunt, cum singula minora sint statuto pretio medio: atque ita quodlibet illorum bis tantum alligari potest; posterio-

ſteriorum autem duorum vtrumque ter, nempe cum quolibet trium priorum. At inter ſe alligari nequeunt, cum ſta tutum pretiū 7. Iuliorū non ſit medium inter illa, aut alteri eorū æquale, ſed vtroque minus. Dic ergo. Si ſumma differentiarum 28. dat 1. lib. quid dabunt ſingulæ differētiæ 4. 4. 4. 8. & 8. vt hic cernis.

Pretium medium.	Pretia.		Differentiæ.
	Piper.	4.	1. 3.
	Garyoph.	3.	1. 3.
7.	Cinnam.	6.	3. 1.
	Crocus.	10.	3. 4. 1.
	Zingib.	8.	3. 4. 1.
			28.
	Summa differentiarum.		

28.	1.	4?	fiunt	$\frac{4}{28}$. pip.
		4?		$\frac{4}{28}$. garyoph.
		4?		$\frac{4}{28}$. cinnam.
		8?		$\frac{8}{28}$. croc.
		8?		$\frac{8}{28}$. zingib.

Ita enim cōflabis 1. librā ex omnibus, quæ cōſtet 7. Iulijs. Quod vt probes, dic. Si 1. lib. pip. valet 4. Iul. quid valebunt $\frac{4}{28}$? Item, Si 1. lib. garyoph. valet 3. Iul. quid valebunt $\frac{4}{28}$? &c. veluti hic factum eſſe vides.

1.	4.	quid	$\frac{4}{28}$	fiunt	$\frac{16}{28}$. pip.
	3.		$\frac{4}{28}$		$\frac{12}{28}$. garyoph.
	6.		$\frac{4}{28}$		$\frac{24}{28}$. cinnam.
	10.		$\frac{8}{28}$		$2\frac{24}{28}$. croc.
	8.		$\frac{8}{28}$		$2\frac{8}{28}$. zingib.

Inuenies enim omnia pretia conficere 7. Iulios, quemadmodum in quæstione proponitur.

Alia alligatio huius 3. quæstionis.

Poteſt etiã alia ratione instituì alligatio huius eiuſdem exẽpli, ſi pretia piperis, & croci alligẽtur; Deinde pretia garyoph. & zingib. ac poſtremo pretia cinnam. & zingib. vt in hoc exemplo videre licet.

Pretium medium.		Pretia.	Differentiæ.
	Piper.	4.	3.
	Garyoph.	3.	1.
7.	Cinnam.	6.	1.
	Crocus.	10.	3.
	Zingib.	8.	4. 1.
			13.
	Summa differentiarum.		

Dic ergo. Si sũma differentiarũ 13. dat 1. lib. quid dabunt ſingulæ differentiæ, 3. 1. 1. 3. & 5? quemadmodum hic vides.

13.	1.	3? 1? 1? 3? 5?	fiunt	$\frac{3}{13}$. pip. $\frac{1}{13}$. garyoph. $\frac{1}{13}$. cinnam. $\frac{3}{13}$. croc. $\frac{5}{13}$. zingib.

Sic enim habebis 1. lib. ex omnibus pro 7. Iulijs. Quod probabis, vt ſupra.

Quid obſeruandũ ſit in alligationibus pluriũ rerũ.

Vides igitur, varijs modis fieri poſſe alligationem, ſi res alligandæ plures ſint, quàm duæ; dummodo pretium medium ſemper minus ſit vno pretio alligando, & maius altero? vel ęquale vni. & maius vel minus altero. Verum

rum licet ex varijs alligationibus ſemper habeas pondus rerum miſcendarum propoſitũ pro pretio medio ſtatuto, non tamen eadem ſemper pondera ex rebus miſcendis accipies, vt ex propoſitis exemplis perſpicuum eſt.

4. Vlna 1. panni rubri valet 4. aur. & vlna 1. panni viridis valet 6. aur. & vlna 1. panni nigri valet 10. aur. Vult quidam ex omnibus 80. vlnas pro 480. aureis. quantum ergo ex ſingulis pannis accipiet? In huiuſmodi quæſtionibus oportet prius inueſtigare pretium vnius vlnæ ex omnibus pannis mixtæ. quod ita fiet in noſtro exemplo. Si 80. vlnæ mixtæ valent 480. aur. quid valebit 1. vlna? inueniesque 6. aur. quod eſt pretium 1. vlnæ mediũ inter pretium vilioris panni, & pretium carioris. Quod ſi reperiretur pretium non medium, impoſſibilis eſſet quæſtio. Vt ſi diceret aliquis. Vult quidam ex omnibus pannis 80. vlnas pro 300. aur. vel pro 900. aur. impoſſibilis eſſet quæſtio. Nam ſi 800. vlnæ valent 300. aur. valebit 1. vlna $3\frac{3}{4}$. aur. quod pretium minus eſt pretio vilioris panni. Quare neque ex viliori panno habere poteſt quiſpiam 80. vlnas pro 300. aureis, tantum abeſt, vt ex omnibus vlnas 80. accipiat. Rurſus, ſi 80. vlnæ valent 900. aur. valebit 1. vlna $11\frac{1}{4}$. aur. quod pretium maius eſt pretio carioris panni. Quare plures vlnas carioris panni, quam 80. emet quiſpiam aureis 900. ac proinde multo plures, ſi ex omnibus aliquot vlnas accipere velit: Sed redeamus ad noſtrum exemplum.

Quæſt. 4.

Quando quæſtio alligationis eſt impoſſibilis.

Inuento pretio medio vnius vlnæ, fiat alligatio vt in præcedentibus, queadmodũ hic est factum. Primũ enim alligauimus pretia 4. & 10. ad medium pretium 6. Deinde pretia 6. & 10.

Pretium medium.		Pretia.		Differentiæ.
6.	rub.	4.		4.
	virid.	6.		4.
	nig.	10.		2. 0.
				10.
	Summa		differentiarum.	

Dic igitur. Si summa differentiarum 10. dat 80. vlnas, (tot enim vlnas accipere vult ex triplici panno) quid dabunt singulæ differentiæ 4. 4. & 2? vt hic factum est.

10. 80. { 4? 4? 2? } fiunt { 32. rubri. 32. viridis. 16. nigri. }

Ita enim ex tribus illis pannis sumentur 80. vlnæ pro 480. aur. Quod ita probabis. Si 1. vlna valet 6. aur. (hoc enim pretium medium inuentum est vnius vlnæ ex tribus pãnis mixtæ.) quid valebunt 32. vlnæ panni rubri, & 32. viridis, & 16. nigri? veluti hic cernis.

1. 6. { 32? 32? 16? } fiunt { 192. rub. 192. virid. 96. nig. }

Reperiesque omnia pretia conficere 480. aureos.

Quod

Quod si pretium panni viridis non alligassemus cum pretio panni nigri, sed cũ pretio pãni rubri, fieret sequẽs alligatio. Verum alios numeros inuenissemus.

	Pretia.		Differentiæ.
Pretium medium. 6.	rub.	4.	4. 0.
	virid.	6.	2.
	nig.	10.	2.
			8.
	Summa		differentiarum.

Dixissemus enim. Si summa differentiarum 8. dat 80. vlnas, quid dabunt singulæ differentiæ 4. 2. & 2? vt hic vides.

8.	80.	4? 2? 2?	fiunt	40. rub. 20. virid. 20. nig.

Examen fiet, vt prius, si dicas. Vlna 1. valet 6. aur. quid valebunt vlnæ 40. panni rubri, & 20. viridis, & 20. nigri? Inuenies enim omnia pretia conficere 480. aureos.

5. Sunt quatuor genera vini; primi amphora 1. valet 21. baioch. secundi 27. tertij 30. & quarti 40. Vult quidam miscere ex his 300. amphoras, ea lege, & conditione, vt singulæ amphoræ valeant 33. baioch. Quantum ergo ex quolibet accipiet? Hic necessario tria priora pretia cum posteriori alliganda sunt ad medium pretium 33. baioch. cum illa tria sint hoc minora, vt in dato exemplo vides. Quæst. 5.

 Dic

Dic ergo. Si ſumma differentiarum 42. dat 300. am-phoras quid dabũt ſingulæ differentiæ 7.7.7.& 21? vt patet in exẽplo.

	Pretia.	Differentiæ.
33.	21.	7.
	27.	7.
	30.	7.
	40.	12. 6. 3.
		42.
	Summa	differentiarum.

42. 300. { 7? 7? 7? 21? } fiunt { 50. primi. 50. ſecundi. 50. tertij. 150. quarti.

Sic enim conficies 300. amphoras, quarũ ſingulæ conſtabunt 33. baioch. Quod vt probes, dic. Si ſumma differentiarum 42. dat 1. amphoram, quid dabunt ſingulæ differentiæ 7. 7. 7. & 21? vt hic vides.

42. 1. { 7? 7? 7? 21? } fiunt { $\frac{1}{6}$. primi. $\frac{1}{6}$. ſecundi. $\frac{1}{6}$. tertij. $\frac{1}{2}$. quarti.

Atque ita habebis vnam amphoram ex quadruplici illo vino mixtam. Dic ergo rurſus. Si 1. amphora vini primi valet 21. baioch. quid valebit $\frac{1}{6}$. amphoræ? Item ſi 1. amphora ſecundi

ſecundi valet 27. quid valebit $\frac{1}{6}$? Item ſi 1. amphora tertij valet 30. quid valebit $\frac{1}{6}$? Item ſi 1. amphora quarti valet 40. quid valebit $\frac{1}{2}$. vt hic vides.

1.	21.	quid	$\frac{1}{6}$?	fiunt	$3\frac{1}{2}$. primi.
	27.		$\frac{1}{6}$?		$4\frac{1}{2}$. ſecundi.
	30.		$\frac{1}{6}$?		5. tertij.
	40.		$\frac{1}{2}$?		20. quarti.

Quæ omnia pretia efficiũt 33. baioch. vt proponitur.

Breuius tamen ita quoque inſtitui poteſt examen. Quoniam ſi 1. amphora valere debet 33. baioch. valebunt 300. amphoræ 9900. baioch. Dicemus ergo. Si 300. amphoræ valent 9900. baioch. quid valebũt 50. amphoræ primi vini, & quid 50. ſecundi, & 50. tertij, & 150. quarti? vt hic vides.

30. 9900.	50?	fiunt	1650. primi.
	50?		1650. ſecundi.
	50?		1650. tertij.
	150?		4950. quarti.

Inuenies enim omnia pretia conficere 9900. baiochos.

6. Quidam pro 400. aur. emere vult 400. lib. aromatum variorum, nimirum garyophyllorum, piperis, cinnamomi, Zingiberis, nucum myriſticarum, & croci, quorũ hæc ſunt pretia pro ſingulis libris, Iulij 6. 7. 9. 11. 12. 16. Quot ergo ſingulorum libras accipiet, vt 400. lib. pro 400. aur. habeat? Hic vt in quæſtione 4. dictum eſt, inueſtigandũ eſt prius pretium medium vnius libræ, ad quod alligatio fieri debet, hoc modo. Si 400. Quæſt. 6.

lib. valent 400. aur. quid valebit 1. lib? Inuenies enim 1. aur. hoc eſt, 10. Iul. Quoniam vero, vt diximus, variæ fieri poſſunt alligationes, alligabimus primum carioph. cum Zingib. & croco. Deinde piper cum nuc. myriſt. & croco. Poſtremo cinnam. cũ nuc. myriſt. vt hic factũ eſſe vides. Deinde dicem⁹ Si ſumma differentiarum 32. dat 400. lib. quid dabunt ſingulæ differentiæ 7. 8. 2. 4. 4. & 7? vt hic vides.

Pretium medium.		Pretia.	Differentiæ.
10.	garyoph.	6.	1. 6.
	piper.	7.	2. 6.
	cinnam.	9.	2.
	zingib.	11	4.
	nuc. myr.	12.	3. 1.
	crocus.	16.	4. 3.
			32.
	Summa differentiarum.		

32. 400.	7?	fiunt	$87\frac{1}{2}$. garyoph.
	8?		100. pip.
	2?		25. cinnam.
	4?		50. zingib.
	4?		50. nuc. myr.
	7?		$87\frac{1}{2}$. croc.

Inuenies enim 400. lib. quæ valebunt 400. aur. & ſingulæ lib. conſtabunt 10. Iul. Quod probabis, vt in præcedenti quæſtione dictum eſt.

Poſſunt

Poſſunt fieri in hac quæſtione plures aliæ alligationes diuerſæ, vt in quatuor exemplis hic appoſitis apparet.

Pretium medium.	Pretia.	Differentiæ.
	6.	1. 2. 6.
	7.	1. 2. 6.
	9.	1. 2. 6.
10.	11.	4. 3. 1.
	12.	4. 3. 1.
	16.	4. 3. 1.
Sũma differentiarũ.		51.

Pretium medium.	Pretia.	Differentiæ.
	6.	1.
	7.	2.
	9	6.
10.	11.	4.
	12.	3.
	16.	1.
Sũma differentiarũ.		17.

Pretium medium.	Pretia.	Differentiæ.
	6.	6.
	7.	2.
	9.	1.
10.	11.	1.
	12.	3.
	16.	4.
Sũma differentiarũ.		17.

Pretium medium.	Pretia.	Differentiæ.
	6.	2.
	7.	1.
	9.	6.
10.	11.	3.
	12.	4.
	16.	1.
Sũma differentiarũ.		17.

In primo enim quodlibet priorum trium pretiorum alligatum eſt cum omnibus tribus poſterioribus. In ſecundo vero primum cũ quarto, & ſecundum cum quinto, & tertium cum ſexto. In tertio deinde primum cum ſexto, &

secundum cum quinto, & tertium cum quarto. In quarto denique primum cum quinto, & secundum cum quarto, & tertium cum sexto. Atque ita in similibus quęstionibus plures fieri possunt alligationes inter se diversæ.

Quæst. 7. 7. Quidam vult statuam argenteam 300. librarum. Offeruntur ei duo genera argenti: Primi lib. 1. valet 30. aur. secundi 20. quæ ita inter se miscere vult, vt 1. lib. constet 24. aur. Quantũ ergo ex quolibet argẽto sumet, vt habeat 300. li. quarũ singulæ cõstẽt 24. aur? Ita stabit alligatio, vt hic vides. Dic ergo.

Pretium medium.	Pretia.		Differentiæ.
	30.		4.
24.			
	20.		6.
			10.
	Summa differentiarum.		

Si summa differentiarum 10. dat 300. lib. quid dabunt singulæ differentiæ 4. & 6? vt hic vides.

10. 300. {4? 6?} fiunt {120. primi arg. 180. secundi arg.

Ita enim reperies 300. libras, quarum singulæ valent 24. aur. Quod probabis, vt in quæstione 5. dictum est.

REGV-

REGVLA FALSI SIMPLICIS POSITIONIS.

CAP. XXII.

INTER alias Arithmeticæ regulas non postremum locum obtinet regula falsi, quæ sic dicitur, non quòd falsum nos doceat, sed quòd ex falso posito verum eruere ostendat: quod quidem efficit, ponendo quemuis numerum, qui propositæ quæstioni putatur satisfacturus, licet reipsa non satisfaciat. Hæc autem regula duplex est. Quędam enim vocatur simplicis positionis, in qua nimirum vnica fit positio vnius dumtaxat numeri, qui quæstioni creditur satisfacturus: quædam vero duplicis positionis dicitur, in qua videlicet duplex fit positio duorum numerorum, quorum vterque quæstioni satisfacturus putatur.

Regula falsi cur sic dicta sit.

Regula falsi duplex.

Cæterum magnum est inter duas has regulas discrimen. Quidquid enim per priorem soluitur, id etiam per posteriorem explicari potest, non autem contra. Innumeræ enim propemodum quæstiones per posteriorem soluuntur, quæ nulla ratione per priorem possunt explicari. Nam sub priori continentur illæ tantum quæstiones, in quibus tales partes, aut numeri exprimuntur, qui eandem proportionem habent in paruis numeris, quam in magnis: quales sunt $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{2}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{3}{4}$.

Discrimẽ inter duas regulas falsi.

Nota.

$\frac{1}{4}$. $\frac{3}{4}$. &c. Item numeri dupli, tripli, quadrupli,&c. Itaque ſatis eſſet,ſi poſterior regula ſola proponeretur. Sed quia per priorem plurimæ quæſtiones multo breuius explicantur,quam per poſteriorem, vtramque paucis declarabimus,initio ſumpto à priori, quæ facilior eſt.

Regula falſi ſimplicis poſitionis quõ fiat.

Propoſita igitur quæſtione quacunque per regulam falſi ſimplicis poſitionis ſoluenda, ponatur quiuis numerus, qui quæſtioni creditur ſatisfacturus, iſque iuxta quæſtionis tenorem examinetur; & quidem ſi omnia conſonent, numerus poſitus erit is, qui quæritur: Si vero aliter ſe res habeat, falſa fuit poſitio numeri aſſumpti. Quare ex hoc falſo eliciendum erit verum beneficio regulæ trium, vt in exemplis declarabitur.

Queſt.I.

1. Tres emere conſtituunt domum quandam 2700. aur. Secundus duplo plus vult dare, quàm primus,& tertius triplo plus, quàm ſecundus. Quantum ergo quiſq; expẽdet? Hac quæſtione nihil aliud quæritur, quàm vt numerus 2700. diuidatur in tres partes ea lege, vt ſecunda ſit dupla primæ, & tertia tripla ſecundæ. Pone ergo primum dare quotcunque aureos volueris, nempe 6. Igitur iuxta tenorem quæſtionis ſecundus dabit 12. cum hic numerus ſit duplus primi; tertius vero dabit 36. quòd hic numerus ſit triplus ſecundi. Omnes autem hi tres numeri efficiũt 54. aur.cum tamen efficere deberent 2700. Dic ergo. Si 54. prouenerunt ex falſa poſitione 6. aur. primi, ex qua vera poſitione prouenient 2700? Inueniesq; primum dediſſe 300.aur.ac proinde ſecun-

cundum 600. & tertium 1800. qui omnes tres numeri efficiunt 2700.

Posset quoq; pecunia secundi, & tertij reperiri ex vtriusq; positione, si diceretur. Si 54. prouenerunt ex falsa positione 12. aur. secundi, & ex falsa positione 36. aur. tertij, ex quo prouenient 2700? Inuenires enim pecuniam secundi esse 600. aur. & tertij 1800. Sed satius est inuestigare per regulam trium pecuniam vnius duntaxat. Ex hac enim aliorum pecuniæ facili negotio elicientur, iuxta tenorem quæstionis.

Eosdem prorsus numeros reperisses, si pro primo alium numerum posuisses, quàm 6. ac proinde pro secundo aliũ, quàm 12. & pro tertio alium, quàm 36.

2. Interrogatus quidam, quantum pecunię in arca haberet, respondit se nescire, hoc tamen se certo à procuratore cognouisse, $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. & $\frac{1}{5}$. suæ pecuniæ constituere 4700. aur. Quantum ergo pecuniæ is habuit? Hic etiam nihil aliud quæritur, quàm numerus, cuius $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. & $\frac{1}{5}$. simul efficiant 4700. Pone ergo illum habere 60. aur. (vt autem fractiones vitentur, quo ad fieri potest, sumendus est semper numerus, qui contineat fractiones in quæstione expressas, vt cap. 10. docuimus, qualis hic est 60.) cuius $\frac{1}{3}$. est 20. & $\frac{1}{4}$. 15. & $\frac{1}{5}$. 12. quæ omnes partes constituunt 47. Debebant autem conficere 4700. Dic ergo. Si 47. prouenerunt ex 60. quem numerum falso posuimus, ex quo prouenient 4700? inueniemusq; 6000. atq; tot aureos in arca habuit. Nam $\frac{1}{3}$. continet 2000. & Quæst. 2.

$\frac{1}{4}$. 1500.

$\frac{1}{4}$.1500. & $\frac{1}{5}$. 1200. quæ omnes partes efficiunt 4700.

Quæſt.3. 3. Interrogatus quidam ludi magiſter, quot haberet diſcipulos, reſpondit: Si adhuc ſemel tot haberem, quot habeo, & accederet $\frac{1}{2}$. eorum, & $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. & præterea 1. haberem 112. Quot ergo diſcipulos habuit? Hæc quæſtio ita propoſita ſolui non poteſt per hanc regulam, propterea quòd vnitas, cuius poſtremo loco fit mentio, non poteſt habere eandem proportionem cum $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$.$\frac{1}{4}$. & duplo parui numeri, quam cum eiſdē partibus, & duplo magni numeri. Si tamen auferatur 1. ex numero 112. qui in quæſtione debet produci, ſoluetur quæſtio propoſita. Tunc enim nihil aliud quæritur, quam numerus, qui bis ſumptus, vnà cum $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. facit 111. Nam ſi tandem addatur 1. fient 112. Pone ergo illum habuiſſe 12. diſcipulos. Hic enim numerus continet fractiones datas. Si ergo totidem diſcipuli accedant, habebit 24. nempe duplo plures, quàm prius. Ad quos ſi rurſus accedat $\frac{1}{2}$. nimirum 6. & $\frac{1}{3}$. nempe 4. & $\frac{1}{4}$. vt pote 3. habebit 37. Debebant autem eſſe 111. vt addito 1. haberet 112. Dic ergo. Si 37. prouenerunt ex 12. ex quo prouenient 111. Inuenieſque eum habuiſſe 36. diſcipulos. Nam ſi accedant totidem, habebit 72. quibus ſi addantur $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. videlicet 18. 12. & 9. fient 111. addito deniq; 1. fient 112.

Quæſt. 4. 4. Quidam emit equum, hortum, ac domum 5000. aur. ea lege, vt hortus quadruplo pluris conſtet, quàm equus, at domus quincuplo pluris, quàm hortus. Quanti ergo emit equum,

quum, & quanti hortum, & quanti domum? Hic quæritur, vt numerus datus 5000. distribuatur in tres partes, ita vt secunda sit primæ quadrupla, & tertia secundæ quincupla. Estque quæstio hæc similis primæ. Pone ergo, equum valere 30. aur. quo posito, valebit hortus 120. aur. & domus 600. qui omnes numeri conficiunt 750. Deberent autem conficere 5000. Dic ergo. Si 750. prouenerunt ex 30. ex quo prouenient 5000? Inueniesque 200. atque tot aureis fuit emptus equus, ac proinde hortus emptus fuit 800. aur. & domus 4000. qui omnes numeri cõstituũt 5000. aur.

5. Quidam proficiscens venetijs Hierosolymam expendit in itinere $\frac{2}{3}$. & $\frac{1}{5}$. suæ pecuniæ; domum autem reuersus deprehendit sibi superesse 36. aureos. Quantum ergo pecuniæ is secum tulit? Hic quæritur numerus, à quo si auferantur $\frac{2}{3}$. & $\frac{1}{5}$. reliquus sit numerus 36. Pone illum habuisse 300. aur. ex quo si auferas $\frac{2}{3}$. nempe 200. & $\frac{1}{5}$. nimirum 60. supersunt 40. Debebant autem remanere tantum 36. Dic ergo. Si 40. prouenerunt ex 300. ex quo prouenient 36. Inueniesque 270. atque tot aureos habuit. Nam ablatis $\frac{2}{3}$. nempe 180. & $\frac{1}{5}$. nimirum 54. supersunt 36. Quæst. 5.

Quod si quando contingat, partes in quæstione expressas vnitatẽ superare, ac proinde non posse ex posito numero subtrahi, quæstio impossibilis erit. Vt si diceret quis. Da mihi numerum, vt, si ex eo demas $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{5}$. relinquantur 36. quæstio esset impossibilis. Nam $\frac{2}{3}$. Nota.

& $\frac{3}{5}$.

& $\frac{3}{5}$. vnitatem ſuperant, ac proinde auferri nequeunt ex poſito numero 300. quia $\frac{2}{3}$. ſunt 180. & $\frac{3}{5}$. ſunt etiam 180. quæ partes ſimul cõſtituunt 360. qui numerus ex 300. auferri non poteſt.

Quæſt. 6. 6. Quæratur numerus, cuius $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. & $\frac{1}{6}$. efficiant 522. Pone numerum eum eſſe 60. cuius $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. & $\frac{1}{6}$. nempe 30. 20. 15. 12. & 10. efficiunt 87. Nos autem volumus 522. Dic ergo. Si 87. prouenerunt ex 60. ex quo prouenient 522? Inueniesq́; 360. Huius enim numeri $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. & $\frac{1}{6}$. nimirum 180. 120. 90. 72. & 60. efficiunt 522.

Quæſt. 7. 7. Quidam interroganti ſe, quantum pecuniæ haberet, reſpondit, ſe tot aureos habere, vt ſi ad eos addatur $\frac{1}{2}$. eorum, & $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. & præterea 100. aur. conſtituant 300. aur. Quantam ergo pecuniã habuit? Vt hæc quæſtio per hanc regulam ſoluatur, detrahendi ſunt 100. aur. ex 300. vt in quæſtione 3. diximus, & inquirendus numerus, vt, ſi addatur eius $\frac{1}{2}$. & $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. fiant 200. Tunc enim additis 100. fient 300. vt in quæſtione proponitur. Pone ergo eum numerum eſſe 24. Huius $\frac{1}{2}$. eſt 12. & $\frac{1}{3}$. 8. $\frac{1}{4}$. 6. quæ omnes partes additæ ad 24. faciunt 50. Nos autem volumus, vt efficiant 200. Dic ergo. Si 50. prouenerunt ex 24. ex quo prouenient 200? Inueniesque 96. ac tanta fuit ſumma aureorum. Nam $\frac{1}{2}$. continet 48. & $\frac{1}{3}$. 32. & $\frac{1}{4}$. 24. qui omnes numeri faciunt 104. additi autem ad 96. efficiunt 200. ad quem numerum ſi tandem adijciantur 100. fient 300.

Quæſt. 8. 8. Quidam volens molere 500. modios tri-

tritici adit molitorem habentem 5. molas, quarum prima singulis horis molit 7. modios, secunda 5. tertia 4. quarta 3. quinta 1. Quanto ergo tempore totum triticum moletur, si omnibus molis triticum imponatur, & quantum tritici singulis molis imponendum? Pone in 4. horis. Quo posito, prima mola conficiet 28. modios, secũda 20. tertia 16. quarta 12. & quinta 4. qui omnes modij faciunt 80. Debent autem esse 500. Dic ergo. Si 80. modij prouenerunt ex 4. horis: 500. modij ex quot horis prouenient? Inueniesq; 25. horas. In tot enim horis prima mola molet 175. modios, secunda 125. tertia 100. quarta 75. & quinta 25. qui omnes sunt 500. modij; atq; tot modij cuilibet molæ subijciendi sunt, quot ipsa modios molit in 25. horis.

9. Quidam proficiscens ad nundinas lucratus est ex pecunia, quam secum attulerat, tantum, vt lucrum vnà cum pecunia allata triplum esset pecuniæ allatæ. Ex hac deinde pecunia in alijs nundinis tantam pecuniam lucratus est, vt lucrum vnà cum pecunia ad has nundinas allata quincuplum esset huius pecuniæ. Postremo ex hac pecunia in alijs nundinis tantum lucratus est, vt lucrum vnà cum pecunia, quam proxime habebat, quadruplum esset huius pecuniæ; inuenitque se habere 40000. aur. Quantum ergo pecuniȩ ad primas nundinas attulit? In hac quæstione inquiritur numerus, qui multiplicatus per 3. & productus numerus per 5. & hic numerus productus per 4. faciat 40000. Pone eum numerũ esse 10. quẽ si multiplices per 3. facies Quæst. 9.

30. pro lucro vna cum pecunia in primis nũdinis. Si autem multiplices 30. per 5. procreabis 150. pro lucro vnà cum pecunia in secundis nundinis. Si denique multiplices 150. per 4. facies 600. pro lucro vnà cum pecunia in tertijs nundinis. Nos vero diximus, in tertijs nundinis eum habuisse 40000. aur. Dic ergo. Si 600. prouenerunt ex 10. ex quo prouenient 40000? Inueniesque $666\frac{2}{3}$. atque tot aureos secum ille attulit ad primas nundinas. Nam si multiplicemus $666\frac{2}{3}$. per 3. efficiemus 2000. pro lucro & pecunia in primis nũdinis. Si deinde multiplicem⁹ 2000. per 5. gignem⁹ 10000. pro lucro ac pecunia in secũdis nũdinis. Si denique multiplicemus 10000. per 4. producemus 40000. pro lucro ac pecunia in tertijs nũdinis.

Quęst. 10. 10. Inuestigetur numerus, vt eo multiplicato per 4. & producto per 3. & hoc producto per 6. atque huic producto additis 10. producantur 800. Hæc quæstio per hanc regulam solui nequit, nisi prius detrahantur 10. ex 800. propter rationem in quæstione 3. dictam. Subtrahe ergo 10. ex 800. relinquenturque 790. atque hic numerus producendus est ex multiplicationibus in quæstione expressis. Nam si ei addantur 10. fiet numerus 800. Pone numerum quęsitum esse 10. quem si multiplices per 4. facies 40. qui numerus multiplicatus per 3. facit 120. hic denique numerus multiplicatus per 6. producit 720. Deberent autem produci 790. Quare dic. Si 720. prouenerunt ex 10. ex quo prouenient 790? Inueniesque $10\frac{35}{36}$. atq; hic est numerus, qui quæritur.

tur. Si enim multiplices $10\frac{35}{36}$. per 4. facies $43\frac{8}{9}$. quem numerum si rursus multiplices per 3. gignes numerum $131\frac{2}{3}$. quem si denique per 6. multiplices, procreabis 790. Additis autem 10. fient 800.

11. Senex quidam interroganti de sua ætate, respondit; se tot habere annos, vt si eis adderetur $\frac{1}{2}$. ipsorum, & ex summa detraheretur $\frac{1}{4}$. ipsius, haberet 99. annos. Quot ergo annos habuit? Hic inueniendus est numerus, ad quem si adijciatur $\frac{1}{2}$. ipsius, & ex summa detrahatur $\frac{1}{4}$. eiusdem summę, reliquus sit numerus 99. Pone eum habuisse 80. annos. Si igitur adijciatur eorum $\frac{1}{2}$. nempe 40. anni, fient 120. à quibus si detrahatur $\frac{1}{4}$. nimirum 30. supererunt 90. Dicuntur autem superesse 99. Dic ergo. Si 90. prouenerũt ex 80. ex quo prouenient 99? Inueniesque 88. atq; tot annos senex ille habuit. Si namq; eis adijcias $\frac{1}{2}$. eorum nimirum 44. facies 132. à quibus si auferas $\frac{1}{4}$. nempe 33. supererunt 99. Quæst. 11.

12. Apparet fastigium cuiusdam turris 24. palmorum: dicit autem quidam, $\frac{1}{3}$. & $\frac{2}{5}$. eiusdem turris à circumiacentibus ædificijs occultari. Quanta ergo est totius turris altitudo? Hic quærendus est numerus, ita vt, si ab eo auferatur $\frac{1}{3}$. & præterea $\frac{2}{5}$. relinquãtur 24. Pone eum numerum esse 30. à quo si auferas $\frac{1}{3}$. videlicet 10. & $\frac{2}{5}$. nimirum 12. remanent 8. Nos autem volumus, vt relinquantur 24. Dic ergo. Si 8. proueniunt ex 30. ex quo prouenient 24? Inueniesque 90. ac tanta est altitudo turris. Nam si auferas Quęst. 12.

$\frac{1}{3}$. & $\frac{2}{5}$. nempe 30. & 36. relinquentur 24.

Quęst. 13. 13. Est hasta, cuius $\frac{1}{3}$. alba est, & $\frac{1}{5}$. nigra, & $\frac{2}{9}$. cærulei colo..., supersunt autem 12. palmi rubri. Quanta est ergo lõgitudo illius hastę? Hic etiam inquirendus est numerus, ita vt, si ex eo dematur $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{5}$. & $\frac{2}{9}$. reliquus sit numerus 12. Pone eum numerum esse 45. à quo si auferas $\frac{1}{3}$. nempe 15. & $\frac{1}{5}$. nimirum 9. & $\frac{2}{9}$. hoc est, 10. supersunt 11. Debẽt autem remanere 12. Dic ergo. Si 11. prouenerunt ex 45. ex quo prouenient 12? Inueniesq́; 49 $\frac{1}{11}$. ac tot palmorũ est hastæ illius longitudo. Nam eius $\frac{1}{3}$. continet palmos 16 $\frac{4}{11}$. at $\frac{1}{5}$. continet palmos 9 $\frac{2}{11}$. Item $\frac{2}{9}$. continent palmos 10 $\frac{10}{11}$. qui omnes numeri ablati ex longitudine hastæ palmorum 49 $\frac{1}{11}$. relinquunt 12. palmos.

Quęst. 14. 14. Quidam pro 30. vlnis panni albi, & 40. vlnis panni nigri expendit 660. aureos, constiteruntque singulæ vlnæ panni nigri duplo pluris, quàm singulæ vlnæ panni albi. Quanti ergo constitit vna vlna panni albi, & quanti vna vlna nigri? Pone vnam vlnam panni albi constitisse 4. aur. Et quoniam pretium vnius vlnæ panni nigri est duplo maius, necesse est, vnam vlnam panni nigri constitisse 8. aur. Ex quo fit, 30. vlnas panni albi constare 120. aur. & 40. vlnas panni nigri valere 320. aur. qui omnes aurei efficiũt 440. Nos autem diximus, illum expendisse 660. aur. Dic ergo. Si 440. prouenerunt ex 4. ex quo proueniẽt 660? Inueniesque 6. aur. pro pretio vnius vlnæ panni albi, ac proinde 12. aur. pro pretio vnius vlnæ panni nigri. Ita enim 30. vlnæ panni albi constabunt 180.

aur.

aur. & 40. vlnæ panni nigri valebunt 480. aur. qui omnes aur. conficiunt 660. aur.

REGVLA FALSI DVPLICIS POSITIONIS.

CAP. XXIII.

PROPOSITA quæstione quacunque per regulam falsi duplicis positionis explicanda, ponatur quiuis numerus siue paruus, siue magnus, qui iuxta tenorem quæstionis examinetur. Nam si is quæsito respondeat, soluta erit quæstio; sin minus, notandus erit excessus, vel defectus, quo à veritate aberratum est, vnà cum litera P. vel M. quarum illa plus, hæc vero minus significat, prout videlicet error veritatem excesserit, aut ab ea defecerit. Deinde ponatur rursus aliquis alius numerus siue maior priore, siue minor, qui eodẽ modo examinetur, &c. Nam ex duplici hac positione, & duplici errore veritas elicietur hoc modo.

Regula falsi dũplicis positionis quõ fiat.

Si in vtraque positione à veritate aberratum est per excessum, vel defectum, subtrahatur minor error ex maiore, & numerus relictus pro diuisore seruetur. Deinde numerus primo positus per secundum errorem, & numerus secundo positus per primum errorem multiplicetur, minorque numerus productus ex maiore detrahatur. Nam si nume-

Qñ vtraq; positio veritatẽ excedit, fit subtractio.

numerus hic residuus per diuisorem iam inuentum nimirum per differentiam errorum, diuidatur, dabit Quotiens numerum quæsitũ, qui quæstioni propositæ satisfaciet.

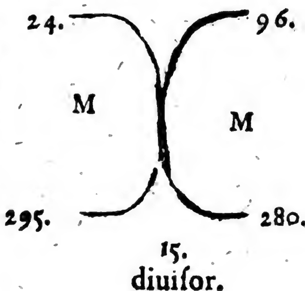
Qñ vna positio veritatem excedit, & altera deficit, fit additio.

Si vero in alterutra positione à veritate aberratum est per excessum, & in altera per defectum, colligendi erunt duo errores in vnam summam, vt habeatur diuisor: Similiter duo illi numeri, qui ex multiplicatione numerorum positorum per errores, vt dictum est, producuntur, in vnam summam sunt colligendi, vt habeatur numerus diuidẽdus, &c. Id quod ex quæstionibus fiet perspicuum.

Quæst. 1.

1. Quæratur numerus, à cuius dimidio subtracta $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. relinquantur 300. Ponatur numerus 24. qui nimirum habeat partem $\frac{1}{2}$. in quæstione expressam, & eius $\frac{1}{2}$. alias partes expressas, nempe $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. contineat, vt fractiones, quoad fieri potest, vitentur: qui quidem numerus facile inuenietur, si numerus sumatur habens posteriores fractiones, & is postea duplicetur. Solet autem numerus hic primo acceptus poni ad sinistram in superiori parte crucis, & error in parte inferiori ad sinistram quoque, litera denique P. vel M. prout veritatem excesserit error ille, vel ab ea defecerit, in medio crucis ad eandem sinistram: Secundus vero numerus acceptus cum errore, & littera P. vel M. eodem ordine collocari solet ad dexteram eiusdem crucis, vt in nostro exemplo factum esse vides. Hic numemerus 24. positus ita iuxta pronunciationem quæstionis examinabitur. Eius $\frac{1}{2}$. est 12. à quo

quo numero detrahenda est $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. Est autem $\frac{1}{3}$. numeri 12. numerus 4. & $\frac{1}{4}$. numerus 3. qui numeri detracti ex 12. relinquũt 5. Debebant autem relinqui 300. Aberratum est ergo à veritate per defectum 295. vnitatum; ac proinde error hic notandus est cum litera M.

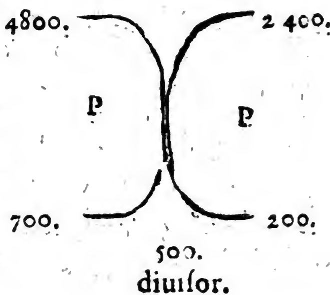


Ponatur secundo numerus 96. qui ita iuxta quæstionem examinabitur. Eius $\frac{1}{2}$. est 48. at $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. huius numeri 48. sunt 16. & 12. qui ex 48. ablati relinquunt 20. Debebant autem relinqui 300. Defecimus ergo rursus à veritate 280. vnitatibus, ac proinde error hic notãdus est etiam cum litera M.

Iam vero, quia in vtraque positione defecimus à vero, subtrahendus erit minor error ex maiore, vt habeatur diuisor 15. in inferiori parte crucis collocandus. Deinde multiplicandus numerus 24. primo positus per 280. secundum errorem, & numerus 96. secundo positus per 295. primum errorem, minorque numerus productus 6720. ex maiore 28320. subtrahendus, vt relinquatur numerus diuidendus 21600. Hic enim numerus diuisus per diuisorem inuentum 15. dabit Quotientem 1440. qui est numerus quæsitus. Eius enim $\frac{1}{2}$. est 720. & huius $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. sũt 240. & 180.

qui numeri ex 720. detracti, relinquunt 300. vt in quæstione proponebatur.

Sed soluamus eandem quæstionem per alios duos numeros, qui veritatem excedãt; deinde per alios, quorum vnus veritatem excedat, & alter ab eadẽ deficiat. Ponatur ergo primum numerus 4800. Huius $\frac{1}{2}$. est 2400. cuius $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. sunt 800. & 600. qui numeri ex 2400. ablati relinquunt 1000. Debebant autem relinqui 300. excessimus ergo veritatem 700. vnitatibus, atq; adeo error hic scribendus



est cum littera P. Ponatur deinde numerus 2400. Huius $\frac{1}{2}$. est 1200. cuius $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. sunt 400. & 300. quibus numeris ex 1200. ablatis, remanent 500. Debebant autem relinqui 300. Excessimus ergo rursus veritatem 200. vnitatibus. Iam vero, subtracto minore errore de maiore, relinquetur diuisor 500. Facta autem multiplicatione numerorum positorum per errores in crucem, vt dictum est, subtractoq; minore numero producto 960000. de maiore 1680000. relinquetur numer⁹ diuidẽdus 720000. qui per 500. diuisus dabit Quotientẽ 1440. vt prius.

Rursus ponamus primo numerũ 2400. quo examinato iuxta quæstionem propositam, inueniemus excessum 200. qui error scribendus

dus est cum litera P. Deinde ponamus numerum 96. quo eadem ratione examinato, deprehendemus defectum 280. qui scribendus est cum litera M. Quoniam vero in vna positione excessimus veritatem, & in altera defecimus à vero, facienda erit additio errorum, vt componatur diuisor 480. Item duo numeri producti ex multiplicatione numerorũ positorum per errores in crucē, nempe 672000. & 19200. in vnam summã colligēdi, vt fiat diuidēdus numerus 691200. Diuiso enim hoc numero 691200. per 480. fiet Quotiens 1440. veluti prius.

2400.		96.
	P M	
200.		280.
	480. diuisor.	

2. Alexander Magnus in familiari colloquio, quod cum Calisthene philosopho quodam die habuit, in ætatum mentionem forte fortuna, vt accidere solet, incidit, hoc modo eum alloquens. Ego Ephestionem duobus supero annis, Clytus vero nostram amborum ætatem complectitur, & insuper quatuor annos. Ex quo fit, vt omnes tres compleamus annos 96. quot nimirum pater tuus vixisse dicitur. Quot ergo annos habuit tunc Alexander, Ephestion, & Clytus? Vides hic numerum 96. distribuendum esse in tres partes, ita vt prima superet secundam binario, tertia vero duas primas simul sumptas quaternario excedat. Vel inueniendos esse 3. nu- Quæst. 2.

meros, quorum primus ſecundum ſuperet binario, & tertius primos duos ſimul ſumptos quaternario excedat, omnes vero tres conſtituant 96. Pone ergo Alexandrum habuiſſe annos 20. ac proinde Epheſtionem 18 & Clytum 42. Ita enim ætas Alexandri ſuperat Epheſtionis ætatem annis 2. Clytus autem amborum ætatem annorum 38. comprehendit, & inſuper 4. annos, vt in quæſtione proponitur. Quoniam vero hi numeri 20. 18. 42. conſtituunt tantum 80. qui 96 deberent conficere, fit vt à vero defecerimus 16. vnitatibus. Pone ergo rurſus Alexãdri annos fuiſſe 30. ac propterea Epheſtionem habuiſſe annos 28. & Clytum 62. qui omnes efficiunt 120. Deberent autem efficere tantum 96. Exceſſimus ergo veritatem 24. vnitatibus. Facta iam additione errorum inter ſe, quod vnus defecerit à veritate, & alter eandem exceſſerit, fient 40. pro diuiſore. Facta item multiplicatione 20. per 24. & 30. per 16. productiſque 480. 480. inter ſe additis, fient 960. quibus diuiſis per 40. fiet Quotiens 42. atq; tot annos tũc Alexander Magnus habuit, ac proinde, iuxta quæſtionis tenorem, Epheſtio 22. & Clytus 50. qui omnes conſtituunt 96. annos.

20.			30.
18.			28.
42.			62.
80.	M	P	120.
16.			24.
	40. Diuiſor.		

3. Tres

3. Tres habent summam quandã pecuniæ, nempe 44. aureos. Secundus habet duplo plus quàm primus,& præterea 4. aureos. Tertius autem tantum habet, quantum primus & secundus, & præterea 6. aur. Quantum ergo quisque habet? Hic vides numerum 44. distribuendum esse in tres partes, vt secũda dupla sit primæ, contineatque præterea 4. tertia vero æqualis sit primæ, ac secundæ, contineatque præterea 6. Vel quærendos esse tres numeros, quorum secundus contineat primũ bis, & insuper 4. tertius vero contineat primum, & secundum semel, & præterea 6. ipsi vero tres numeri cõficiant 44. Pone ergo primum habere 10. quo posito, habebit secundus 24. nẽpe duplo plus quàm primus, & insuper 4. tertius autẽ habebit 40. tãtum videlicet, quantum primus ac secundus, ac præterea 6. qui tres numeri conficiunt 74. Deberent autem conficere solum 44. Excessimus ergo veritatem 30. vnitatibus. Pone deinde primum habere 6. Habebit ergo secundus 16. & tertius 28. qui tres numeri conficiunt 50. Deberent autem conficere solum 44. Excessimus ergo rursum veritatẽ 6. vnitatibus. facta iã subtractione minoris erroris de maiore, quia vterque er- Quæst. 3.

10.			6.
24.			16.
40.	P	P	28.
74.			50.
30.			6.

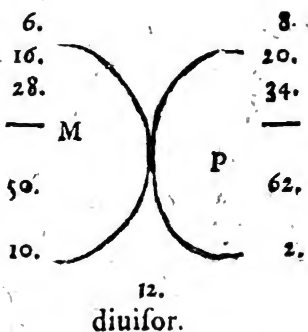
24.
Diuisor.

que error excessit veritatem, reliquus erit diuisor 24. Facta item multiplicatione 10. per 6. & 6. per 30. subtractoque illo producto 60. ex hoc 180. remanebit diuidendus numerus 120. quo diuiso per 24. fiet Quotiens 5. Tãtum ergo habet primus: secundus vero 14. & tertius 25. qui tres numeri in vnam summam collecti efficiunt 44.

Si multiplicarentur numeri, quos posuimus secundum ac tertium habere, per eosdẽ errores, &c. inuenirentur numeri, quos secundus ac tertius habent. Vt ex 24. per 6. fiunt 144. & ex 16. per 30. fiunt 480. Subtracto autem illo numero ex hoc, remanent 336. quo numero diuiso per 24. diuisorem inuentum, fiet Quotiens 14. pro numero secundi. Item ex 40. per 6. fiunt 240. & ex 28. per 30. fiunt 840. subtracto autem illo numero ex hoc, reliquus erit numerus 600. quo diuiso per 24. fiet Quotiens 25. pro numero tertij. Sed satius est, inuento numero primi, inuestigare reliquos, iuxta pronunciationem quæstionis, nempe eo modo, quo vterque numerus falsò positus est examinatus. Aliquando tamen cõmodius erit inquirere alios numeros ea ratione, qua primus quæsitus est; vt in quæstione 6. manifestum erit.

Quæst. 4. 4. Quærantur tres numeri, qui faciant 60. secundus autem contineat primum bis, & insuper 4. tertius vero contineat primum, ac secundum, & præterea 6. Hæc quæstio similis est antecedenti. Pone primum numerum esse 6. ac proinde secundum 16. & tertium 28. qui tres numeri faciunt 50. Deberent autem facere

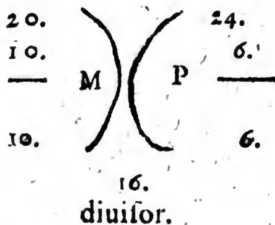
facere 60. Factus est ergo error per defectum 10. Pone rursus primum numerum esse 8. ac proinde secundũ 20. & tertium 34. qui tres numeri faciunt 62. Deberent autem facere 60. Excessimus ergo verum 2. vnitatibus. Operare, vt regula præcipit, inuenies que primũ numerum esse $7\frac{2}{3}$.



diuisor.

ac proinde secundum $19\frac{2}{3}$. & tertium 33. qui tres numeri efficiunt 60.

5. Diuidatur numerus 30. in duas partes, quarum prior cum 60. numerum faciat triplum numeri ex posteriori parte, & 20. compositi. Pone priorem partem esse 20. ac proinde posteriorem 10. Prior cum 60. facit 80. & posterior cum 20. facit 30. Qu. 5.

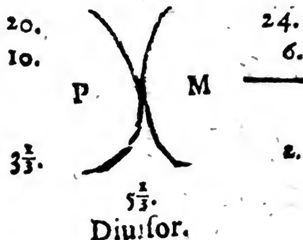


diuisor.

Deberet autem numerus 80. triplus esse numeri 30. iuxta pronunciationem exempli. Cum ergo numerus 90. triplus sit numeri 30. defecimus 10. vnitatibus à vero. Pone rursus priorem partem esse 24. ac propterea posteriorem 6. Prior cum 60. facit 84. & posterior cũ 20. facit 26. Deberet autem numerus 84. iuxta te-

ta teorem quæstionis, triplus esse numeri 26. Cum ergo numerus 78. triplus sit numeri 26. xcessimus veritatem 6. vnitatibus. Operar, vt regula præcipit, inueniesq; priorem parem esse $22\frac{1}{2}$. atque adeo posteriorem $7\frac{1}{2}$. Prior enim cum 60. facit $82\frac{1}{2}$. & posterior cũ 20. facit $27\frac{1}{2}$. cuius numeri ille triplus est.

Alio modo institui potest solutio huius quæstionis. Postquam enim in prima positione deprehendimus priorẽ partem 20. cum 60. facere 80. & posteriorem partem 10. cũ 20. facere 30 cui⁹ numeri ille deberet esse triplus; videndum est, cuius numeri triplus sit numerus 80. Est autẽ triplus numeri $26\frac{2}{3}$. quem numerus 30. superat numero $3\frac{1}{3}$. Excessimus ergo veritatem hoc numero $3\frac{1}{3}$. Rursus postquam in secunda positione inuentum est priorem partem 24. cum 60. facere 84. & posteriorem partem 6. cum 20. facere 26. cuius numeri ille deberet esse triplus; videndum est, cuius numeri triplus sit numerus 84. Est autem triplus numeri 28. à quo numerus 26. deficit 2. vnitatibus. Defecimus ergo à veritate binario. Operare iam secundum regulæ præcepta, inueniesque priorem partem esse $22\frac{1}{2}$. & posteriorem $7\frac{1}{2}$. vt prius. Sed prior ratio commodior videtur, cum



cum facilius per eam vitentur fractiones.

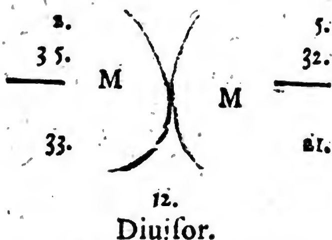
6. Quærantur tres numeri, quorum primus additus ad 73 faciat duplum reliquorũ duorum; secundus vero cum 73. faciat triplũ duorum reliquorum; tertius denique cum 73. faciat quadruplum reliquorum duorum. Pone primum numerum esse 1. vel alium quemuis numerum imparem, vt additus ad 73. faciat numerum parem, Quæst. 6.

1.				3.
$10\frac{1}{4}$.	P		P	$12\frac{1}{2}$.
$26\frac{2}{4}$.				$21\frac{1}{2}$.
$54\frac{3}{4}$.				$36\frac{1}{2}$.
		$18\frac{1}{2}$. diuisor.		

qui possit habere dimidium, quandoquidem primus cum 73. debet faceret numerum duplum reliquorum duorum. Quoniam igitur 1. cum 73. facit 74. qui numerus duplus debet esse, iuxta pronunciationem exempli, reliquorum duorum, necesse est, reliquos duos simul esse 37. Et quia secũdus cũ 73. debet facere numerũ triplum primi, (qui est 1.) & tertij, diuidendus erit, per antecedentem quæstionem, numerus 37. in duas partes, quarum prior cum 73. faciat triplum numeri, qui ex posteriore parte, & 1. componitur, atque ita, antequam proposita quæstio soluatur, necesse est, aliam prius soluere, quę in ipsa operatione occurrit.

Pone ergo priorem partem esse 2. atq; adeo posteriorem 35. Facit autem prior cum 73. nume-

numerum 75. posterior vero cum 1. facit 36. cuius triplus non est numerus 75. sed numerus 108. Defecimus ergo à veritate 33. vnitatibus, cũ tot vnitatibus minor sit noster numerus 75. quàm 108. Pone rursus, priorem partem esse 5. atque adeo posteriorem 32. Prior autem cum 73. facit 78. & posterior cum 1. facit 33. cuius numeri triplus non est numerus 78. sed numerus 99. Defecimus ergo rursus 21. vnitatibus. Operare iam secundum præcepta regulæ falsi, inueniesque priorem pattem esse $10\frac{1}{4}$. ac proinde posteriorem $26\frac{3}{4}$.



Itaque si primus numerus propositæ quæstionis est 1. erit secundus $10\frac{1}{4}$. & tertius $26\frac{3}{4}$. Ita enim primus cum 73. facit duplum reliquorum duorum, & secundus cum 73. facit triplum duorum reliquorum. Si ergo tertius cum 73. faciat quadruplum reliquorum duorum, satisfactum erit quæstioni. Facit autem tertius cum 73. numerum $99\frac{3}{4}$. qui quadruplus non est numeri $11\frac{1}{4}$. qui ex primo, & secundo conflatur, sed numerus 45. quadruplus est numeri $11\frac{1}{4}$. Excessimus ergo veritatẽ hoc numero $54\frac{3}{4}$.

Pone iam primum numerum esse 3. qui cũ 73. facit 76. qui numerus duplus esse debet reliquorum duorum. Duo ergo reliqui efficiẽt

38. Et

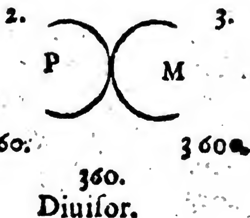
38. Et quia ſecundus cum 73. debet facere triplum primi, (qui eſt 3.) & tertij; diuidendus erit per antecedentem quæſtionem, numerus 38. in duas partes, quarum prior cum 73. faciat triplum eius numeri, qui ex poſteriore parte, & 3. componitur. Pone ergo priorem partem eſſe 2. atq; adeo poſteriorem 36. Facit autem prior cum 73. numerum 75. at poſterior cum 3 facit 39. cuius triplus non eſt numerus 75. ſed numerus 117. Defecimus ergo à veritate numero 42. Pone rurſus priorem partem eſſe 23. ac proinde poſteriorem 15. Prior autem cum 73. facit 96. at poſterior cum 3. facit 18. cuius numeri triplus non eſt numerus 96. ſed numerus 54. Exceſſimus ergo verum numero 42. Operare ſecundum regulam falſi, inueniesque priorem partem eſſe $12\frac{1}{2}$. ac proinde poſteriorem $25\frac{1}{2}$.

2.			23.
36.	M	P	15.
42.			42.
	84. Diuiſor.		

Itaque ſi numerus primus quæſtionis propoſitæ eſt 3. ſecundus erit $12\frac{1}{2}$. & tertius $25\frac{1}{2}$. Ita .n. primus cũ 73. facit duplum reliquorũ duorum, & ſecundus cum 73. facit triplum reliquorum duorum. Si igitur tertius cum 73. faciat quadruplum reliquorum duorum, ſoluta erit quæſtio. Facit autem tertius cum 73. numerum $98\frac{1}{2}$. qui quadruplus non eſt numeri $15\frac{1}{2}$. ſed numerus 62. Excesſimus ergo verum numero hoc $36\frac{1}{2}$.

Iam vero si multiplices primos numeros per errores in crucem, item secundos, & tertios, (commodius enim inuenientur secundus & tertius hoc modo, quam si ex primo inuento illos elicere vellemus, propterea quod opus esset quæstione præcedenti hic vti) & facta subtractione, residuos numeros diuidas per diuisorem inuentum $18\frac{3}{4}$. nempe per differentiam errorum, quod in vtraque positione factus est semper excessus, inuenies primum numerum esse 7. secundum 17. & tertium 23. Nam primus cũ 73. facit 80. qui numerus duplus est reliquorum duorum: at secundus cũ 73. facit 90. qui numerus triplus est duorum reliquorum. Tertius denique cum 73. facit 96. qui numerus reliquorum duorum quadruplus est.

Quæst. 7. 7. Quæratur numerus, quo multiplicato per 3. & producto additis 10. Et summa hac multiplicata per 4. productoque additis 20. Summa vero hac multiplicata per 5. & producto additis 30. Summa denique hac multiplicata per 6. productoq; additis 40. numerus producatur 6700. Finge numerum eum esse 2. qui multiplicatur per 3. facit 6. additis autem 10. fiunt 16. Hæc autem summa multiplicata per 4. fiunt 64. & additis 20. fiunt 84. Rursus hac sũma multiplicata per 5. fiunt 420. additisq; 30. fiunt

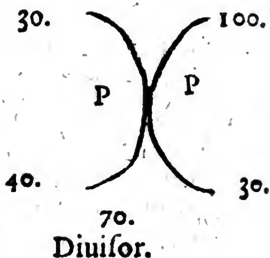


fiunt 450. Hæc denique summa multiplicata per 6. fiunt 2700. additisque 40. fiunt 2740. Debebat autem vltima hæc summa esse 6700. Defecimus ergo à veritate hoc numero 3960. Finge deinde eundem numerum esse 3. qui multiplicatus per 3. facit 9. additisque 10. fiunt 19. Hæc autem summa multiplicata per 4. facit 76. additisq; 20. fiunt 96. Hæc rursum summa per 5. multiplicata facit 480. additisque 30. fiunt 510. Denique hæc summa multiplicata per 6. facit 3060. additisque 40. fiunt 3100. Debebant autem effici 6700. Defecimus ergo iterum à veritate numero hoc 3600. Operare secundum regulam, inuenieſque numerum quæsitum esse 13. Hic enim numerus multiplicatus per 3. facit 39. additisque 10. fiunt 49. Hæc summa multiplicata per 4. facit 196. additis vero 20. fiunt 216. quæ sūma multiplicata per 5. facit 1080. additis autem 30. fiunt 1110. quæ denique summa multiplicata per 6. facit 6660. additisque 40. fiunt 6700.

8. Ludimagister quidam tot habet discipulos, vt singuli persoluant 5. aur. desint illi 30. aur. ad emendam domum, in qua habitat; si vero singuli dent 6. aur. supersint 40. aurei vltra pretium domus. Quot ergo habet discipulos, & quantum est pretium domus? Hic nihil aliud quæritur, quam numerus, qui multiplicatus per 5. talem procreet numerum, vt additis 30. eadem summa fiat, quæ relinquitur, si idem numerus per 6. multiplicetur, & à producto detrahātur 40. Pone ergo numerū discipulorū esse 30. qui multiplicat⁹ Quæst. 8.

 per 5.

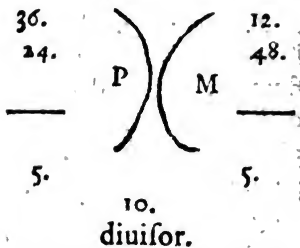
per 5. facit 150. additiſque 30. fiunt 180. Tanti ergo conſtabit domus, ſi 30. diſcipulos habeat, quorum ſinguli perſoluant 5. aureos. Videam⁹ iã, an ſupr ſint vltra hoc pretium aur. 40. ſi ſinguli ſoluant 6. aur. Multiplicatus autem idẽ numerus diſcipulorũ 30. per 6. facit 180. nihilq́; ſupereſt vltra pretiũ do



mus 180. aureorum: debebant autem ſupereſſe 40. aurei. Defecimus ergo à veritate hoc numero 40. Finge rurſus, numerum diſcipulorum eſſe 100. qui multiplicatus per 5. facit 500. additiſque 30. fiunt 530. Tanti ergo conſtabit domus, ſi 100. habeat diſcipulos, quorum ſinguli perſoluant 5. aureos. Videamus iam, an ſuperſint 40. aurei vltra hoc pretiũ, ſi ſinguli dent 6. aureos. Multiplicatus autem idem numerus diſcipulorũ 100. per 6. facit 600. ſuperſuntq́; 70. aurei vltra pretium domus 530. aureorum: debebant autem ſupereſſe tantum 40. Exceſſimus ergo veritatem hoc numero 30. Operare per regulam falſi, inueniesq́; numerum diſcipulorum 70. Hic enim numerus multiplicatus per 5. facit 350. additiſque 30. fiunt 380. Tantum ergo eſt pretium domus. Idẽ numerus diſcipulorum 70. multiplicatus per 6. facit 420. qui numerus ſuperat pretium domus 380. aur. hoc numero 40.

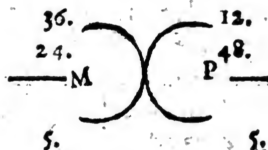
Quæſt. 9. 9. Duo inter ſe partiri debebant æqualiter 60.

ter 60. aureos: Orta autem rixa inter eos, quilibet rapuit, quantum potuit. Inita postea pace, primus deposuit $\frac{1}{4}$. suæ pecuniæ, secundus vero $\frac{1}{3}$. factumque est tunc, vt tam prim⁹ accipiens $\frac{1}{3}$. secundi, quàm secundus accipiés $\frac{1}{4}$. primi habuerit 30. aur. Quantum ergo quisque primo rapuit? Pone primum rapuisse 36. aur. atque adeo secundum reliquos 24. Si igitur primus deponat $\frac{1}{4}$. nempe 9. aur. relinquetur ei 27. aur. quibus si addamus $\frac{1}{3}$. secundi, quam dicitur deposuisse, nempe 8. aur. faciemus 35. aur. pro primo. Debebat autem solum habere 30. Excessimus ergo verum numero 5. Pone iam primum surripuisse 12. ac propterea secundum reliquos 48. Si igitur primus deponat $\frac{1}{4}$. hoc est, 3. aur. remanebunt ei 9. aur. quibus si addamus $\frac{1}{3}$. secundi, puta 16. aur. efficiemus 25. aur. pro primo. Debebat autem habere 30. Defecimus ergo 5. vnitatibus à vero. Operare secundum regulam, inuenieśq; primum rapuisse 24. & secundum propterea 36. Nam si primus deponat $\frac{1}{4}$. nimirum 6. aur. & reliquis 18. addat $\frac{1}{3}$. secundi, nempe 12. habebit 30. aur. Sic etiam si secundus, deposita $\frac{1}{3}$. nempé 12. aur. reliquis 24. addat $\frac{1}{4}$. primi, id est, 6. aur. habebit 30. aur.



Porro ex positione secundi eodem modo verum eliciemus. Nam in priori positione, si

ſecundus deponat $\frac{1}{3}$. nempe 8. aureos & reliquis 16. adiungat $\frac{1}{4}$. primi, hoc eſt, 9. aur. habebit 25. aur. qui deberent eſſe 30. Defecimus ergo à veritate 5. vnitatibus. In poſteriori vero poſitione, ſi ſecundus deponat $\frac{1}{3}$. nempe 16. aur. & reliquis 32. adijciat $\frac{1}{4}$. primi, nimirum 3. aur. efficiet 35. aur. qui deberent eſſe tantum 30. Exceſſimus ergo verum rurſus 5. vnitatibus. Operare per regulam, multiplicando errores per poſitiones ſecundi, &c. reperieſque ſecundum ſurripuiſſe 36. aur. & primum 24.



Quæſt. 10. 10. Duo partiri debebant inter ſe 100. aur. æqualiter: orta autem inter eos rixa, quilibet quantum potuit, arripuit. Cōpoſita deinde pace inter eos, depoſuit prim⁹ $\frac{1}{3}$. ſuæ pecuniæ, ſecundus vero depoſuit $\frac{1}{5}$. primus autem accepit hanc $\frac{1}{5}$. & ſecundus illam $\frac{1}{3}$. quo facto vterque habuit 50. Quantum ergo quiſq; primo rapuit? Finge, primum rapuiſſe 30. aur. ac proinde ſecundum 70. Primi $\frac{1}{3}$. eſt 10. quã ſi deponat, relinquuntur illi 20. Secundi $\frac{1}{5}$. eſt 14. quæ ſi detur primo, habebit primus



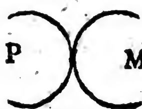
34. aureos

54. aureos. Debebat aũt habere 50. Defecim⁹ ergo à veritate numero hoc 16. Finge rursus, primũ surripuisse 60. ac propterea secundum 40. Primi $\frac{1}{3}$. est 20. quam si deponat, supererunt ei aur. 40. Secundi $\frac{1}{5}$. est 8. quã si demus primo, habebit primus 48. Debebat autẽ habere 50. Defecimus ergo in hac etiam positione à veritate numero 2. Operare per regulam, reperiesq; primũ surripuisse $64\frac{2}{7}$. atq; adeo secundũ $35\frac{5}{7}$. Primi enim $\frac{1}{3}$. est $21\frac{3}{7}$. quã si deponat, remanebunt ei $42\frac{6}{7}$. Secundi $\frac{1}{5}$. est $7\frac{1}{7}$. quam si deponat, supererunt ei $28\frac{4}{7}$. Iã vero si $\frac{1}{5}$. secundi, nempe $7\frac{1}{7}$. detur residuo primi. quod fuit $42\frac{6}{7}$. habebit primus 50. Item si $\frac{1}{3}$. primi, nimirum $21\frac{3}{7}$. detur residuo secũdi, quod fuit $28\frac{4}{7}$. habebit quoque secundus 50. vt in quæstione proponebatur.

11. Duo inter se ita distribuũt 100 aur. vt si primus deponat $\frac{1}{3}$. & secundus $\frac{1}{4}$. atque aggregatum harum partium bifariam secetur, deturq; $\frac{1}{2}$. vtrique numero relicto, numeri fiãt æquales, nempe 50. & 50. Quantæ ergo sunt amborum partes? Finge primi partem esse 60. ac proinde secundi 40. Si primus deponat $\frac{1}{3}$. nempe 20. remanent ei 40. Si vero $\frac{1}{4}$. secundi, nẽpe 10. adijciatur ad $\frac{1}{3}$. primi, hoc est, ad 20. fiẽt 30. atq; huius aggregati $\frac{1}{2}$. nimirũ 15. dem⁹ residuo primi, quod fuit 40. faciemus 55. Debebamus aũt facere tãtũmodo 50. Excessimus ergo veritatem hoc numero 5. Finge deinde, primũ habere 24. ac proinde secundũ 76. (Posui autẽ hosce numeros, quod prior habeat $\frac{1}{3}$. & posterior $\frac{1}{4}$. sine fractionib⁹.) Si primus deponat $\frac{1}{3}$. nẽpe 8. supersũt ei 16. Si vero $\frac{1}{4}$. secũdi videlicet 19. adijciatur ad $\frac{1}{3}$. primi, nẽpe ad Quæst. 11.

8. vt fiant 27. atque huius aggregati $\frac{1}{2}$. hoc est, 13$\frac{1}{2}$. demus residuo primi, quod fuit 16. habebit primus 29$\frac{1}{2}$. Debebat autem habere 50. Defecimus ergo à veritate 20$\frac{1}{2}$. Operare iam per regulam, inuenies que partẽ primi esse 52$\frac{16}{17}$.

60. 40. — 24. 76.



5. — 20$\frac{1}{2}$.

25$\frac{1}{2}$.
Diuisor.

ac proinde secundi 47$\frac{1}{17}$. Nam primi $\frac{1}{3}$. est 17$\frac{11}{17}$. quam si deponat, remanent ei 35$\frac{5}{17}$. Secundi $\frac{1}{4}$. est 11$\frac{13}{17}$. quam si deponat, supersunt ei 35$\frac{5}{1}$. Aggregatum autem ex $\frac{1}{3}$. primi, & ex $\frac{1}{4}$. secundi, id est, ex 17$\frac{11}{17}$. & 11$\frac{13}{17}$. est 29$\frac{7}{17}$. cuius $\frac{1}{2}$. videlicet 14$\frac{12}{17}$. adiecta ad residuum primi, hoc est, ad 35$\frac{5}{17}$. & ad residuum secundi, id est, ad 35$\frac{5}{17}$. facit 50. & 50.

Quæst. 12. 12. Diuidatur numerus 1000. in duas partes, quarum maior superet minorem numero hoc 49. Finge, maiorem partẽ esse 600. ac proinde minorẽ 400. Superat autem illa hanc numero 200. & nos volebamus, excessum esse 49.

600. 400. — 550. 450.



151. — 51.

100.
Diuisor.

Excessimus ergo veritatẽ numero 151. Finge deinde, maiorẽ partẽ esse 550. ac proinde minorẽ 450. Superat autem illa hanc

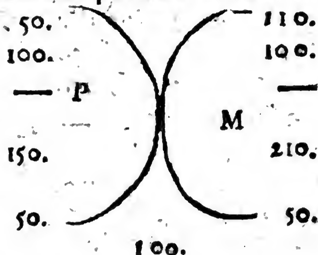
hanc numero 100. & nos volebamus, excessum esse 49. Excessimus ergo rursus veritatem numero 51. Operare secundum regulam, inueniesque maiorem partem esse 524½. ac propterea minorem 475½. Illa enim hanc superat numero dato 49.

13. Quidam habet duo pocula aurea, & vnum cooperculũ 150. aureorum, quod additũ priori poculo facit eius pretium triplũ pretij posterioris poculi, additũ vero posteriori poculo facit illud eiusdẽ pretij cũ priori. Quanti ergo cõstant duo illa pocula? Hic quęruntur duo numeri, quorum primus cũ 150. triplus sit secundi, secundus vero cum 150. æqualis sit primo. Pone, prius poculum constare 30. aur. (Pono autem hunc numerum, quia additis 150. fit numerus, qui habet subtriplum sine fractione.) Addito cooperculo 150. aureorum, constabit 180. aur. & quoniam pretium hoc triplum esse debet pretij posterioris poculi, constabit posterius poculũ 60. aur. Addito cooperculo, cõstabit 210. Debebat autem constare tantum 30. vt eius pretium æquale esset pretio prioris. Excessimus ergo veritatem numero 180. Pone deinde, prius poculum constare 90. aur. Addito cooperculo 150. aureorum, constabit 240. aur. ac proinde posterius poculum constabit 80. aur. cum ille numerus huius sit triplus. Quęst. 13.

M		P
30.		90.
150.		150.
—		—
180.		240.
180.		140.
	40. Diuisor.	

Addito cooperculo, cõſtabit 230. Debebat autẽ cõſtare tantũ 90. vt eius pretiũ prioris pretio eſſet ęquale. Exceſſimus ergo etiam hic veritatem numero 140. Operare per regulam, inueniesque pretium prioris poculi 300. aur. Addito enim cooperculo 150. aur. fiet pretium 450. aur. atque adeo pretium poſterioris poculi erit 150. aur. ſubtriplum videlicet illius; additoq; cooperculo fiet pretium 300. aur. æquale pretio prioris.

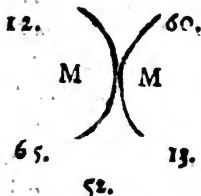
Quæſt. 14. 14. Quidam habet duo pocula aurea, & vnum cooperculum 100. aureorũ, quod additũ priori poculo facit eius pretium triplũ pretij poſterioris, additũ vero poſteriori facit eius pretiũ duplum pretij prioris. quãti ergo æſtimantur duo illa pocula? Finge, prius valere 50. aur. Addito cooperculo 100. aureorũ, valebit 150. aur. ac proinde poſterius valebit etiam 50. aur. cũ ille numerus huius triplus ſit. Addito cooperculo, valebit 150. aur. qui numerus duplus non eſt pretij prioris, ſed numerus 100. duplus eſt illius pretij. Exceſſimus ergo veritatẽ numero 50. Pone rurſus, prius valere 110. aur. Addito cooperculo, valebit 210. aur. ac propterea poſterius valebit 70. aur. cum ille numerus huius ſit triplus. Addito cooperculo valebit 170. aur. qui numerus duplus non eſt pretij prioris, ſed numerus 220. eius duplus eſt,



Defe-

Defecimus ergo à veritate numero 50. Operare per regulam, inueniesq; pretium prioris poculi 80. aur. Addito enim cooperculo 100. aureorum, fiet pretium 180. aur. ac proinde pretiũ posterioris poculi erit 60. aur. subtriplum videlicet illius: additoq; cooperculo, fiet pretium 160. aur. duplum pretij prioris, quod erat 80. aur.

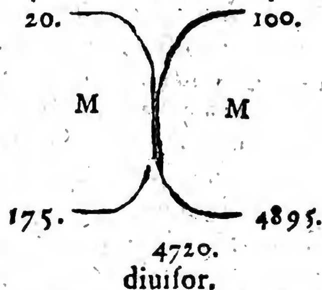
15. Quidam emit tot perdices, vt si emisset $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. illarũ, & pręterea 22. haberet 100. Quot ergo emit? Hic quæritur numerus, cui⁹ $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. cũ 22. faciãt 100. Pone enĩ emisse 12. Hui⁹ numeri $\frac{1}{2}$. est 6. & $\frac{1}{3}$. 4. & $\frac{1}{4}$. 3. quæ partes faciũt 13. additisq; 22. fiunt 35. Debebant autem fieri 100. Defecimus ergo numero 65. Pone secundo, eum emisse 60. Huius numeri $\frac{1}{2}$. est 30. & $\frac{1}{3}$. 20. & $\frac{1}{4}$. 15. quæ partes faciunt 65. additisq; 22. fiunt 87. Debebant aũt fieri 100. Defecimus ergo iterũ numero 13. Operare per regulã, inueniesq;, eum emisse 72. perdices. Huius namq; numeri $\frac{1}{2}$. est 36 & $\frac{1}{3}$ 24. & $\frac{1}{4}$. 18. quæ partes cõficiunt 78. additis autem 22. fiunt 100. quemadmodum propositum est. Quęst. 15.



16. Duo habent summam quandam aureorum: si secundus primo det 1 habebit primus sextuplo plus, q̃ secundus: si vero primus det 15. secundo, habebit secundus decuplo plus, quàm primus. Quot ergo quisq; aureos habet? Hic quæruntur duo numeri, quorum primus Quęst. 16.

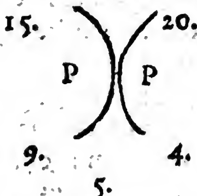
cum

cum 12. vnitatibus secundi sextuplus sit residui secundi, secundus vero cum 15. vnitatibus primi decuplus residui primi. Vt hanc, & similes quæstiões facilius sine fractionibus soluas, incipiendum erit à numero secundo. Finge ergo, secundum habere 20. ex quo si dentur 12. vnitates primo, habebit primus, iuxta quęstionis pronunciationé, sextuplum residui secundi, quod est 8. Habebit ergo túc primus 48. atq; adeo, antequam 12. accepit à secundo, habuit 36. Iã vero si ex hoc numero 36. primi détur 15. vnitates secundo, habebit secúdus 35. qui numerus decuplus esse debet, iuxta quęstionis tenorem, residui primi, quod est 21. Cõstat autem, numerum 35. non esse decuplum numeri 21. sed numerum 210. Defecimus ergo à veritate numero 175. Pone rursus, secundum habere 100. ex quo si détur 12. primo, habebit primus, vt vult quęstio, sextuplũ residui secundi, quod est 88. Habebit ergo tunc primus 528. atq; adeo, antequã 12. accepit à secũdo habuit 516 Iam vero si ex hoc numero 516. primi dentur 15. vnitates secundo, habebit secund 15. qui numerus decuplus esse debet, vt quæ vult, residui primi, quod est 501. constat autem, numerũ 115. non esse decuplum numeri 501. sed numerum 5010. Defecimus ergo rursus à veritate numero 4895. Operare per regulam, inueniesq; secundum habere



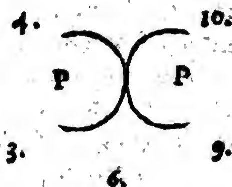
bere $17\frac{2}{59}$. ex quo si dentur 12. vnitates primo, habebit primus sextuplum residui secundi, quod est $5\frac{2}{59}$. Habebit ergo tunc primus $30\frac{12}{59}$. ac proinde, antequam à secundo accepit 12. habuit $18\frac{12}{59}$. Si enim ex hoc numero dentur secundo 15. vnitates, habebit secundus $32\frac{2}{59}$. qui numerus decuplus est residui primi, quod est $3\frac{12}{59}$. vt quæstio proponit.

17. Duo habent summam quandam aureorum: Si secundus det 6. primo, habet primus duplum residui secundi; si vero primus secundo det 3. habebit secundus numerum æqualem residuo primi. Quot ergo aureos quisque habuit? Hic etiam quæruntur duo numeri, quorum primus cum 6. vnitatibus secundi duplus sit residui secundi, secundus vero cum 3. vnitatibus primi æqualis residuo primi. Pone secundum habere 15. ex quo si dentur 6. vnitates primo, habebit primus 18. duplum videlicet residui secundi, quod est 9. atque adeo, priusquàm acciperet 6. à secundo, habuit 12. Iam vero si ex hoc numero dentur 3. vnitates secundo, habebit secundus 18. qui numerus æqualis non est residuo primi, quod est 9. sed maior. Excessimus ergo veritatem numero 9. Pone deinde, secundum habere 20. ex quo si dentur 6. vnitates primo habebit primus 28. duplum videlicet residui secũdi, quod est 14. Antequam ergo acciperet 6. à secundo, habuit 22. Iam vero si primus det secun- Quæst. 17.



ſecundo 3. vnitates, habebit ſecundus 23. qui numer⁹ nõ eſt ęqualis reſiduo primi, quod eſt 19. ſed maior. Exceſſimus ergo rurſus veritatem numero 4. Operare per regulã, inuenieſque, ſecundũ habere 24. ex quo ſi dẽtur 6. vnitates primo, habebit primus 36. nempe duplũ reſidui ſecundi, quod eſt 18. Prius ergo habuit 30. atque adeo ſi det 3. vnitates ſecundo, habebit ſecundus 27. qui numerus æqualis eſt reſiduo primi, quod etiam eſt 27.

Quæſt. 18. 18. Eſt ciſterna habens in fundo tres fiſtulas inęquales: per maximam reſeratam effluit tota aqua in 2. horis, per mediam in 3. & per minimã in 6. Si ergo aqua ſemper æquabiliter effluat, quãto tẽpore effluet, ſi oẽs tres fiſtulæ ſimul reſerentur? Finge in 4. horis, & dic. Si maior fiſtula in 2. horis euacuat 1 ciſternã, quid euacuabit in 4. horis? inuenieſq; 2. ciſternas. Itẽ, Si media fiſtula in 3. horis euacuat 1. ciſternam, quantũ exhauriet in 4. horis? inuenieſq; $1\frac{1}{3}$. ciſtern. Item, Si minima fiſtula in 6. horis exhaurit 1. ciſternam, quãtum euacuabit in 4. horis? inuenieſq; $\frac{2}{3}$. ciſtern. atque ita omnes tres fiſtulę in 4. horis euacuarẽt 4. ciſternas. Nos autem volumus tantum 1. ciſternam. Exceſſimus ergo veritatem numero 3. Pone ſecũdo in 10. horis, & dic. Si maxima fiſtula in 2. horis exhaurit 1. ciſternam, quantũ exhauriet in 10. horis? inuenieſq; 5. ciſternas. Item ſi media fiſtula 1. ciſter-

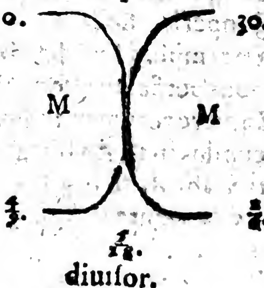


nam

nam euacuat in 3. horis, quātum euacuabit in 10. horis? reperiesq; $3\frac{1}{3}$. cistern. Itē si minima fistula in 6. horis euacuat 1. cisternā, quid exhauriet in 10. horis? inueniesq; $1\frac{2}{3}$. cistern. atq; ita oēs tres fistulæ euacuarēt in 10. horis 10. cister. Nos autem volumus 1. cistern. Excessimus ergo veritatē numero 9. Operare per regulā, inueniesq; in 1. hora euacuari cisternā. Nam maxima fistula in vna hora exhauriet $\frac{1}{2}$. & media $\frac{1}{3}$. & minima $\frac{1}{6}$. quæ omnes partes conficiunt 1. cisternam.

Hæc quæstio etiam ita proponi potest. Est cisterna habēs in orificio tres cānales inæquales. Per maximū impletur cisterna in 2. horis, per medium in 3. & per minimum in 6. &c.

19. Est cisterna habens fistulam in orificio, p quam implentur in 12. horis: in imo vero fundo habet aliam fistulam, per q̄ euacuatur in 18. horis. Si igitur per superiorē continue influat aqua, & per inferiorē sēper effluat, quanto tēpore replebitur tota cisterna? Pone in 20. horis, & dic. Si in 18. horis euacuatur 1. cister. qd euacuabitur in 20. horis? inueniesq; $1\frac{1}{9}$. cistern. Necesse est ergo in 20. horis impleri $2\frac{1}{9}$. cistern. vt eodem tempore euacuata $1\frac{1}{9}$. cisterna maneat 1. cisterna repleta. Dic ergo. si in 12. horis impletur 1. cisterna, quid implebitur in 20. horis? inueniesque $1\frac{2}{3}$. cistern. Quæst. 19.



Nos autem volumus $2\frac{1}{9}$. cister. Defecimus ergo à

go à veritate numero hoc $\frac{4}{9}$. Pone ſecundo in 30. horis,&dic. Si in 18. horis euacuatur vna ciſterna, quid euacuabitur in 30. horis? inuenieſque $1\frac{2}{3}$. ciſtern. Neceſſe eſt ergo in 30. horis impleri $2\frac{2}{3}$. ciſtern. vt eodẽ tẽpore euacuata $1\frac{2}{3}$. ciſter. relinquatur 1. ciſterna plena. Dic ergo. Si in 12. horis impletur 1. ciſterna, quid implebitur in 30. horis? Inuenieſq; $2\frac{1}{2}$. ciſter. Nos autẽ volumus $2\frac{2}{3}$. ciſter. Iterum ergo à veritate defecimus hoc numero $\frac{1}{6}$. Operare per regulam, inuenieſq; in 36. horis ciſternam impleri. Nã in 36. horis ſuperior fiſtula implebit 3. ciſternas; inferior autem exhauriet 2. ciſternas; atque ita remanebit vna plena.

Quæſt. 20. 20. Artifex quidam abſoluit opus quoddã in 30. diebus; at ſi accedat alius, abſoluent ambo idem opus in 18. diebus. Quanto ergo tempore ſecundus hic ſolus idem opus perficiet? Dic primo. Si primus artifex in 30. diebus abſoluit opus, quantum abſoluet in 18. diebus? inuenieſq; $\frac{3}{5}$. operis. Eodem ergo tempore ſecũdus abſoluet $\frac{2}{5}$. vt ambo totũ opus perficiant. Pone ergo primò ſecundũ abſoluere totum opus in 40. diebus,& dic. Si ſecundus in 18. diebus abſoluit $\frac{2}{5}$. operis, quantum abſoluet in 40. diebus? inuenieſq; $\frac{8}{9}$. operis. Nos autem poſuimus eum abſoluere totũ opus. Defecimus ergo à veritate hoc numero $\frac{1}{9}$. Pone deinde ſecundum abſoluere opus in 60. diebus, & dic. Si ſecundus in 18. diebus abſol-

40. 60.

M P

$\frac{1}{9}$. $\frac{3}{9}$.

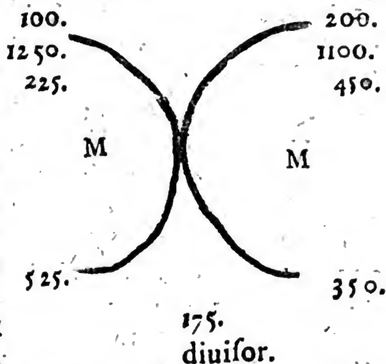
$\frac{4}{9}$.

Diuiſor.

absoluit $\frac{2}{5}$. operis, quantum adsoluet in 60. diebus? inueniesque $1\frac{2}{3}$. Nos autem posuimus eum absoluere 1. opus. Excessimus ergo veritatem hoc numero $\frac{2}{3}$. Operare per regulam, inueniesq; secundum absoluere opus totũ in 45. diebus. Nam si in 18. diebus absoluit $\frac{2}{5}$. operis, absoluet in 45. diebus 1. opus.

Facilius tamen sine regula falsi hæc quæstio soluetur hoc modo. Postquam inuenisti, secundum in 18. diebus absoluere $\frac{2}{5}$. operis, ita vt supersint $\frac{3}{5}$. Dic. Si $\frac{2}{5}$. requirunt 18. dies, $\frac{3}{5}$. quot dies requirent? inueniesq; 27. dies, qui addit ad 18. faciunt 45. dies, quibus totum opus perficiet, vt prius. Vel certe dic. Si $\frac{2}{5}$. requirũt 18. dies, quot dies requiret 1 opus integrum? Inuenies nanque rursum 45. dies, vt prius. Alia solutio huius quæstionis.

21 Tres inter se ita luserunt, vt statim primus lucratus sit $\frac{1}{2}$. pecuniæ secũdi: postea vero secundus $\frac{1}{3}$. pecuniæ tertij: tertius denique $\frac{1}{4}$. pecuniæ eius, quam primus in ludum attulit. Finito autem ludo, quisq; ipsorum 700. aur. habuit: quantum ergo pecuniæ quisq; in ludum attulit? Hic aliud nihil quęritur, quàm vt datus numerus 2100. (Si enim singuli habent 700. habebũt omnes tres 2100.) in tres partes distribuatur, ita vt, si prima det $\frac{1}{4}$. tertiæ, accipiat Quæst. 21.



vero $\frac{1}{2}$.ſecundæ:ſecunda aũt accipiat $\frac{1}{3}$.tertię, fiant tres numeri æquales,nẽpe 700. 700.700. Vel certe quęruntur tres numeri,quorum prim⁹ depoſita $\frac{1}{4}$.ſi accipiat $\frac{1}{2}$. ſecũdi, faciat 700. ſimiliter ſecundus,depoſita $\frac{1}{2}$.cũ $\frac{1}{3}$. tertij faciat 700.eodemq; modo tertius,depoſita $\frac{1}{3}$.cũ $\frac{1}{4}$. primi faciat 700.Pone primũ luſorẽ attuliſſe 100.aur.Depoſita $\frac{1}{4}$.nempe 25.ſuperſunt ei 75. Et quia hoc reſiduum cum $\frac{1}{2}$.ſecundi debet facere 700.erit $\frac{1}{2}$.ſecundi 625.quòd hic numerus cum reſiduo primi,nẽpe cũ 75. faciat 700. Attulit ergo ſecũdus 1250. Poſtquã autẽ perdiderit $\frac{1}{2}$.remanebunt ei 625.Quoniã vero reſiduũ hoc cum $\frac{1}{3}$.tertij debet facere 700.erit $\frac{1}{3}$.tertij 75.quòd hic numerus cum reſiduo ſecundi faciat 700. Quare tertius ſecum attulit in ludũ 225.Poſtquã autẽ perdiderit $\frac{1}{3}$. ſupererunt ei 150. Et quia hoc reſiduũ cum $\frac{1}{4}$. primi, hoc eſt, cum 25.facit 175.Debebat aũt facere 700.defecimus propterea à veritate numero 525. Qui defectus hinc etiã cognoſcitur,ꝙ tres numeri poſiti 100.1250.225.faciunt 1575. qui numerus à 2100.quẽ numerum oẽs tres conficere debent, deficit hoc numero 525.

Pone deinde,primum attuliſſe in ludũ 200 aur.Depoſita $\frac{1}{4}$.nẽpe 50.ſuperſunt ei 150. aur. qui cum $\frac{1}{2}$.ſecundi facere debẽt 700. Erit ergo $\frac{1}{2}$.ſecundi 550.aur. Attulit ergo ſecũ 1100. Perdita autẽ $\frac{1}{2}$. ſuperſunt ei 550.aur.qui cum $\frac{1}{3}$.tertij facere debent 700.Erit ergo $\frac{1}{3}$.tertij 150. acproinde in initio ludi habuit 450. Amiſſa autẽ $\frac{1}{3}$. remanent ei 300.aur.qui cum $\frac{1}{4}$. primi, hoc eſt,cum 50.faciunt 350. Debebant autẽ facere 700. Defecimus ergo etiam nunc à veritate nume-

numero 350. Qui defectus hinc quoq; elici potest,quod tres numeri positi 200.1100. 450. faciunt 1750.qui numer' à 2100.deficit hoc numero 350.Operare per regulã,inueniesq; primum lusorẽ attulisse 400.aur.secundũ 800.& tertiũ 900. Numeros porrò hos secũdi & tertij inuenies vel ex regula falsi, multiplicãdo errores per secundi ac tertij positiões,&c.vel ex primo inuẽto,quẽadmodum paulo ante ex 100.& 200. quos numeros posuimus primum habere,numeros secũdi, ac tertij inuestigauimus.Nam si primus habet 400.habebit(deposita $\frac{1}{4}$.nimirum 100.quã perdidit)300.& quia cum $\frac{1}{2}$.secundi debet habere 700.erit $\frac{1}{2}$.secundi 400.ac proinde secũdus attulit 800.Amissa autẽ $\frac{1}{2}$. supererunt ei 400. Quoniam vero hæc $\frac{1}{2}$.cum $\frac{1}{3}$.tertij facere debet 700. erit $\frac{1}{3}$. tertij 300.propterea q; tertius attulit 900. Amissa .n. $\frac{1}{3}$.remanebunt ei 600.quibus si addatur $\frac{1}{4}$. primi,hoc est,100.aur.habebit 700 vt q̃stio vult.

22.Tres mercatores lucrati sunt 400. aur. quos,habita ratione pecuniæ, quã quisq; posuit,ita distribuerũt,vt secũdi portio superaret portionẽ primi numero 12.tertij vero portio excederet portionem secundi numero 16. Quãta ergo fuit portio cuiusq;? Finge, primũ accepisse 1. aur. (volo enim quæstionem hanc soluere per minimos numeros , nempe Quæst.22.

1.		2.
13.		14.
29. M		M 30.
43.		46.
357.		354.
	3. Diuisor.	

vero $\frac{1}{2}$. secundæ: secunda aũt accipiat $\frac{1}{3}$. tertię, fiant tres numeri æquales, nẽpe 700. 700. 700. Vel certe quęruntur tres numeri, quorum prim⁹ deposita $\frac{1}{4}$. si accipiat $\frac{1}{2}$. secũdi, faciat 700. similiter secundus, deposita $\frac{1}{2}$. cũ $\frac{1}{3}$. tertij faciat 700. eodemq; modo tertius, deposita $\frac{1}{3}$. cũ $\frac{1}{4}$. primi faciat 700. Pone primũ lusorẽ attulisse 100. aur. Deposita $\frac{1}{4}$. nempe 25. supersunt ei 75. Et quia hoc residuum cum $\frac{1}{2}$. secundi debet facere 700. erit $\frac{1}{2}$. secundi 625. quòd hic numerus cum residuo primi, nẽpe cũ 75. faciat 700. Attulit ergo secũdus 1250. Postquã autẽ perdiderit $\frac{1}{2}$. remanebunt ei 625. Quoniã vero residuũ hoc cum $\frac{1}{3}$. tertij debet facere 700. erit $\frac{1}{3}$. tertij 75. quòd hic numerus cum residuo secundi faciat 700. Quare tertius secum attulit in ludũ 225. Postquã autẽ perdiderit $\frac{1}{3}$. supererunt ei 150. Et quia hoc residuũ cum $\frac{1}{4}$. primi, hoc est, cum 25. facit 175. Debebat aũt facere 700. defecimus propterea à veritate numero 525. Qui defectus hinc etiã cognoscitur, ꝙ tres numeri positi 100. 1250. 225. faciunt 1575. qui numerus à 2100. quẽ numerum oẽs tres conficere debent, deficit hoc numero 525.

Pone deinde, primum attulisse in ludũ 200 aur. Deposita $\frac{1}{4}$. nẽpe 50. supersunt ei 150. aur. qui cum $\frac{1}{2}$. secundi facere debẽt 700. Erit ergo $\frac{1}{2}$. secundi 550. aur. Attulit ergo secũ 1100. Perdita autẽ $\frac{1}{2}$. supersunt ei 550. aur. qui cum $\frac{1}{3}$. tertij facere debent 700. Erit ergo $\frac{1}{3}$. tertij 150. ac proinde in initio ludi habuit 450. Amissa autẽ $\frac{1}{3}$. remanent ei 300. aur. qui cum $\frac{1}{4}$. primi, hoc est, cum 50. faciunt 350. Debebant autẽ facere 700. Defecimus ergo etiam nunc à veritate nume-

numero 350. Qui defectus hinc quoq; elici potest, quod tres numeri positi 200. 1100. 450. faciunt 1750. qui numer' à 2100. deficit hoc numero 350. Operare per regulā, inueniesq; primum lusorē attulisse 400. aur. secundū 800. & tertiū 900. Numeros porrò hos secūdi & tertij inuenies vel ex regula falsi, multiplicādo errores per secundi ac tertij positiōes, &c. vel ex primo inuēto, quēadmodum paulo ante ex 100. & 200. quos numeros posuimus primum habere, numeros secūdi, ac tertij inuestigauimus. Nam si primus habet 400. habebit (deposita $\frac{1}{4}$. nimirum 100. quā perdidit) 300. & quia cum $\frac{1}{2}$. secundi debet habere 700. erit $\frac{1}{2}$. secundi 400. ac proinde secūdus attulit 800. Amissa autē $\frac{1}{2}$. superfuerunt ei 400. Quoniam vero hæc $\frac{1}{2}$. cum $\frac{1}{3}$. tertij facere debet 700. erit $\frac{1}{3}$. tertij 300. proptereaq; tertius attulit 900. Amissa .n. $\frac{1}{3}$. remanebunt ei 600. quibus si addatur $\frac{1}{4}$. primi, hoc est, 100. aur. habebit 700 vt q̄stio vult.

22. Tres mercatores lucrati sunt 400. aur. quos, habita ratione pecuniæ, quā quisq; posuit, ita distribuerūt, vt secūdi portio superaret portionē primi numero 12. tertij vero portio excederet portionem secundi numero 16. Quāta ergo fuit portio cuiusq;? Finge, primū accepisse 1. aur. (volo enim quæstionem hanc soluere per minimos numeros, nempe Quæst. 22.

1.		2.
13.		14.
29.	M	M 30.
43.		46.
357.		354.
	3. Diuisor.	

per positionem 1. & 2. vt clarius appareat generalitas huius regulæ falsi.) ac proinde secũdum 13. & tertium 29. qui omnes numeri conficiunt 43. Debebant autem conficere 400. Defecimus ergo à veritate numero 357. Finge rursus, primum accepisse 2. aur. atq; adeo secundum 14. & tertium 30. qui omnes numeri conficiunt 46. Debebant autem conficere 400 Defecimus ergo etiam nunc à veritate numero 354. Operare per regulam, inueniesq; primi portionem esse 120. aur. secundi 132. & tertij 148. qui tres numeri conficiunt summã 400. aur. vt in quæstione proponitur.

Quæst. 23. 23. Imperatoris exercitus contra Turcas continet 40000. Germanorum peditum, tot vero Italos, & Hungaros, vt numerus Italorum sit $\frac{1}{2}$. Germanorum, atq; Hungarorum numerus vero Hũgarorum sit $\frac{1}{3}$. Germanorũ atque Italorum. Quantus ergo est Italorũ, & quantus Hũgagarorũ numeī

30000.			24000.
20000.	P.	P	8000.
10000.			40000.

30000.
diuisor.

atque adeo quãtus totus exercitus? Finge, Italos esse 30000. Et quoniã hic numerus debet esse $\frac{1}{2}$. Germanorũ, atq; Hungarorũ, erũt Germani, atq; Hũgari 60000. Cum ergo Germani sint 40000. erũt Hũgari 20000. qui debẽt cõficere $\frac{1}{3}$. Germanorum, atq; Italorum, nẽpe numeri 70000. Cõficiunt autẽ $\frac{1}{3}$. numeri 60000. Excessimus ergo veritatẽ numero 10000. Finge secundo, Italos esse 240000. Et quoniã hic nume-

numerus debet esse $\frac{1}{2}$. Germanorum, atq; Hũgarorum, erũt Germani, atq; Hungari 48000. Cum ergo Germani sint 40000. erũt Hungari 8000. qui debent conficere $\frac{1}{2}$. Germanorum, atque Italorum, nempe numeri 640000. Conficiunt autem $\frac{1}{3}$. numeri 24000. Excessimus ergo rursus veritatem numero 40000. Operare per regulã, inueniesq; Italos esse 32000. Hũgaros vero 24000. ac proinde totũ exercitum 96000. Nã hac ratione Itali conficiunt $\frac{1}{2}$. Germanorum, atq; Hũgarorum, Hũgari vero $\frac{1}{3}$. Germanorum, atq; Italorum, vt patet.

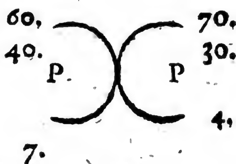
24. Visum est hic apponere artificium illud Archimedis, quo, teste Vitruuio lib. 9. cap. 3. deprehendit furtum aurificis cuiusdam in corona aurea, hoc est, quantum argenti fuerit commistum, non dissoluta corona. Cum enim Hiero rex statuisset Dijs suis votiuam offerre coronam ex puro auro, aurifex, sublata auri portione, argenti tantundem commiscuit: Indignatus vero Hiero se contemptũ, (vt verbis Vitruuij vtar) neque inueniens, qua ratione id furtum deprehenderet, rogauit Archimedem, vti in se sumeret sibi de eo cogitationem. Tunc is, cum haberet eius rei curam, casu venit in balneum, ibiq; cum in solium descenderet, animaduertit, quantum corporis sui in eo insideret, tantum aquæ extra solium effluere. Itaque cum eius rei rationem explicationis offendisset, non est moratus, sed exiliuit gaudio motus de solio, & nudus vadens domum versus significabat clara voce, inuenisse, quod quæreret. Nam currens identidem græce clamabat εὕρηκα, εὕρηκα. Tum Quæst. 24

vero ex eo inuentionis congressu duas dicitur fecisse massas æquo pondere, quo etiam fuerat corona, vnam ex auro, alteram ex argento. Cum ita fecisset, vas amplum ad summa labra impleuit aqua, in quo demisit argenteam massam, cuius quanta magnitudo in vase depressa est, tantum aquæ effluxit: ita exempta massa, quanto minus factum fuerat, refudit, sextario mensus, vt eodem modo, quo prius fuerat ad labra æquaretur. Ita ex eo inuenit, quantum ad certum pondus argenti certa aquæ mensura responderet. Cum id expertus esset, tum auream massam similiter pleno vase demisit, & ea exempta eadem ratione, mẽsura addita, inuenit ex aqua non tantum defluxisse, sed tantum minus, quantum minus magno corpore eodem pondere auri massa esset, quàm argenti. Postea vero repleto vase in eadem aqua ipsa corona demissa, inuenit plus aquæ defluxisse in coronam, quàm in auream eodem pondere massam, & ita ex eo, quod plus defluxerat aquæ in corona, quàm in massa, ratiocinatus, deprehendit argenti in auro mixtionem. Hactenus Vitruuius. Explicemus autem nos, quo pacto per regulam falsi furtum dictum deprehendi possit. si adhibeatur artificium illud Archimedis.

Ponatur exempli causa, coronam illam fuisse 100. lib. eaque imposita in vase effluxisse 65. lib. aquæ, imposita vero massa puri auri 100. lib. effluxisse 60. lib. aquæ; imposita tandem massa pura argenti 100. lib. effluxisse 90. lib. aquæ. Finge ergo, aurificem abstulisse

40.

40. lib. aur. totidemq; libras argenti substituisse, ita vt in corona fuerint 60. lib. auri, & 40. lib. argenti. Vide iam, an corona ita confecta eijciat 65. lib. aquæ. quod ita scies. Dic. Si 100. lib. aur. eijciunt 60. lib. aquæ, quantum aquæ eijcient 60. lib. auri? Item si 100. lib. argenti expellunt 90. lib. aquæ, quantum aquæ expellent 40. lib. argenti? inueniesque in vtraque operatione 36. lib. aquæ, ita vt corona eijciat 72. lib. aquæ. Debebat autem eijcere tantum 65. lib. Excessimus ergo veritatē numero 7. Finge secūdo, aurificē surripuisse 30. lib. auri, ac proinde in corona fuisse 70. lib. auri, & 30. lib. argenti. Dic ergo. Si 100. lib. auri expellūt 60. lib. aquę, quantum aquæ expellēt 70. lib. auri? Item, si 100. lib. argenti eijciunt 90. lib. aquę, quantū aquę eijciēt 30. lib. argēti? inueniesq; in priori operatione 42. li. aquæ, in posteriori vero 27. quæ efficiūt 69. lib. aquæ. Debebant autem esse tantum 65. lib. Rursus ergo excessimus veritatę numero 4. Operare per regulā, inueniesq;, aurificē accepisse $16\frac{2}{3}$. lib. auri, atq; adeo, coronam illam mixtam fuisse ex $83\frac{1}{3}$. lib. auri, & ex $16\frac{2}{3}$. lib. argenti. Quod vt probes, dic. Si 100. lib. auri eijciunt 60. lib. aquæ, quantum aquæ eijcient $83\frac{1}{3}$. lib. auri? Itē, si 100. lib. argenti eijciūt 90. lib. aquæ, quantum aquæ eijcient $16\frac{2}{3}$. lib. argenti? inueniesq; in priori o[illegible]ratiōe 50. li. aquę, in [illegible]steriori



ſteriori vero 15. lib. aquæ, quæ omnes conficiunt 65. libras aquæ, quas poſuimus coronam eijcere.

Eodem modo deprehenſum fuiſſet furtũ, etiamſi maſſæ auri, & argenti nõ fuiſſent 100. lib. quot libras habebat corona, ſed quotcunque librarum, nempe auri 10. lib. v. g. & argẽti 20. dummodo diligenter exploretur, quantum aquæ ſingulæ maſſæ eijciant. Nos ponamus, 10. lib. auri eijcere 6. lib. aquæ, at 20. lib. argenti eijcere 18. lib. aquæ. Vnde in priori poſitione dices. Si 10. lib. aur. eijciunt 6. lib. aquæ, quantum aquæ eijcient 60. lib. auri? &c.

Si ponatur corona 300. lib. & maſſæ auri, argentiq; totidem lib. hac conditione, vt corona eijciat 218. lib. aquæ, aurum vero 206. lib. aquæ, & argentum 230. lib. aquæ; inueniemus in corona fuiſſe 150. lib. auri, totidemque argenti. Vt patet in hiſce duabus poſitionibus, in quarum priore ſtatuuntur 100. lib. auri, & 200. lib. argẽti: in poſteriore autem 101. lib. aur. & 199. argenti, &c.

100.			101.
200.	P	P	199.
—			—
4.			$3\frac{23}{25}$.

$\frac{2}{25}$.
Diuiſor.

Hoc ergo artificio deprehendetur in quacunque maſſa ex auro, argentoque commixta. quantum auri, quantumque argenti permixtum ſit.

diverses questions PRO-

Cinq hommes devise de leur age le premier dit auoir 120 ans le second dit ...

PROGRESSIONES ARITHMETICAE.

CAP. XXIV.

PRogreſſio Arithmetica eſt ſeries pluriũ numerorum ſe æqualiter ſuperantium, vt hic. Progreſſio Arithmetica quid.

Progreſſio naturalis numerorum incipiens ab 1.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. &c.

Progreſſio numerorum imparium incipiens ab 1.

1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21. 23. 25. 27. &c.

Progreſſio numerorum parium incipiens à 2.

2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20. 22. 24. 26. 28. &c.

Prima enim harum trium progreſſionum dicitur progreſſio naturalis numerorum, incipitque ab 1. in qua omnes numeri ſe ordine ſuperant vnitate. Secunda vero dicitur progreſſio numerorum imparium, incipitque ab 1. in qua omnes numeri ſe ordine ſuperant binario. Tertia denique appellatur progreſſio numerorum parium, incipitque à 2. qui eſt primus numerus par, quemadmodum & 1. eſt primus numerus impar, atque adeo primus omnium numerorum, licèt improprie. In hac autem progreſſione numerornm parium omnes numeri ſe ordine ſuperant etiam binario, quemadmodum & in progreſſione numerorum imparium. Eodem modo hic. Progreſſio naturalis numerorũ, & numerorũ imparium pariumq; quid.

Aliæ progressiones.

2. 5. 8. 11. 14. 17. 20. 23. 26. 29. &c.
4. 8. 12. 16. 20. 24. 28. 32. 36. 40. &c.

Prior namque harum progressionum incipit à 2. progrediturque per 3. cum omnes numeri in ea se ordine superent ternario: posterior vero incipit à 4. progrediturque per eũdem numerum 4. cum in ea omnes numeri se ordine superent quaternario.

Arithmetica progressio quo pacto continuetur.

Continuatur quælibet progressio Arithmetica, si differentia, excessusve numero illi addatur, post quem progressio extendenda est. Vt si progressio hæc, 4. 9. 14. 19. 24. continuanda sit, addemus differentiã, siue excessum progressionis, nempe 5. (quam quidem differentiam, excessumve inueniemus, si primum progressionis numerum à secundo, vel quemuis alium à proxime maiore in eadem progressione subtrahamus.) vltimo numero 24. efficiemusque 29. Huic iterum numero adijciemus 5. componemusque 34. & ita deinceps in infinitum. Sic etiam, si quis progressionem incipere velit à 7. & progredi per differentiam, excessumve 6. addenda erunt 6. ad 7. vt fiant 13. pro secundo numero progressionis: Item 6. ad 13, vt fiant 19. pro tertio numero, &c.

Differentia progressionis Arithmeticæ quõ inueniatur.

Pari ratione progressio Arithmetica continuatur retrocedendo, si differentia progressionis à minori extremo subducatur. Vt si progressio hæc 30. 37. 44. 51. 58. continuanda sit versus minores numeros, auferemus differentiam 7. ex minori extremo 30. vt relinquan-

linquantur 23. Ex his rursus subducemus 7. vt remaneant 16. Ex his rursus subducemus 7. vt supersint 9, à quibus rursus auferemus 7. vt supersint 2. à quibus amplius auferri nequeũt 7. ac propterea dicta progressio amplius non potest decrescere. Sic etiam, si quis progressionem inchoare velit à 40. & progredi per 4. versus vnitatem, auferenda erunt 4. ex 40. vt relinquantur 36. Item 4. ex 36. vt remaneant 32. Rursus 4. ex 32. vt supersint 28. Item 4. ex 28. vt relinquantur 24. &c.

Progressio Arithmetica decrescere non potest in infinitũ.

Proprium est progressionis Arithmeticæ trium numerorum, vt aggregatum extremorum æquale sit duplo medij numeri, vt hic apparet, 7. 18. 29. demonstraturque à Iordano lib. 1. propos. 2.

Proprietas progressionis Arithmeticæ trium numerorum.

Progressionis vero Arithmeticæ quatuor numerorum proprium est, vt aggregatũ extremorum æquale sit aggregato mediorum; veluti hic apparet, 4. 12. 20. 28. demonstraturque à Iordano lib. 1. propos. 3. Atque hoc non solum verum est in quatuor numeris sese continuè eodem numero superantibus, quales sunt numeri in dato exemplo; sed etiã in quatuor, quæ non continuè se superant eodem numero, dummodo eadẽ sit differentia inter primum, ac secundum, quæ inter tertium, ac quartum; vt hic vides. 4. 12. 3[illegible]8.

Proprietas progresionis Arithmeticæ quatuor numerorum.

Proprietas progressionis Arithmeticæ quotcunque terminorũ, si numerus terminorum fuerit impar.

Ex his proprietatibus colligitur, in omni progressione Arithmetica, cuius numerus terminorum est impar, aggregatum extremorum æquale esse cuilibet aggregato duorum numerorũ quorumlibet ab extremis æqualiter distantium, nec non duplo medij numeri. Vt hic apparet. 3. 7. 11.

3. 7. 11. 15. 19 23. 27. 31. 35. 39. 43.

Cum enim quatuor hi numeri 3. 7. 39. 43. habeant eandem differentiam, licet non continuatam (Nam eadem est differentia inter 3. & 7. quæ inter 39. & 43.) erit, ex ijs, quæ proxime dicimus, aggregatum extremorum 3. & 43. æquale aggregato mediorum 7. & 39. Eadem ratione aggregatum ex 7. & 39. æquale erit aggregato ex 11. & 35. quod hi quatuor numeri 7. 11. 35. 39. habeant eandem differentiā, licet non continuatam: & ita de reliquis, donec ad tres medios numeros 19. 23. 27. perueniamus; qui cum habeant eandem differentiam, erit, per ea, quæ paulo ante docuimus, aggregatum extremorum 19. & 27. æquale duplo medij numeri 23. Eadem est ratio de omnibus alijs huius generis progressionibus Arithmeticis.

Proprietas progressionis Arithmeticæ quotcunque terminorum, si numerus terminorū fuerit par.

Ex posteriore quoque proprietate efficitur, in omni progressione Arithmetica, cuius numerus terminorum est par, aggregatum extremorum æquale esse cuilibet aggregato duorum numerorum quorūlibet ab extremis æqualiter distantium. Vt hic manifestum est.

3. 7. 11. 15. 19. 23. 27. 31. 35. 39.

Quod probabimus, vt prius, hoc dempto, quòd postremo loco sumendi sunt quatuor numeri medij 15. 19. 23. 27. non autem tres tātum, vt prius; quia hic non est vnicus numerus medius, sed duo. Nunc sequuntur regulæ ad Arithmeticas progressiones spectantes.

REGV-

REGVLA I.

SI in quauis progressione Arithmetica nótus fuerit numerus terminorum vna cũ minore, & maiore extremo, perueniemus in cognitionem summæ omnium terminorum, hac ratione. Addatur primus terminus vltimo, & aggregatum per numerũ terminorum multiplicetur. Dimidium enim numeri producti erit summa omnium terminorum. Vt in hac progressione.

Summa cuiuscũq; progressionis Arithmeticæ quo pacto inueniatur.

4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. 34. 37.

Ex 4. & 37. fiunt 41. quæ multiplicata per numerum terminorum, hoc est, per 12. (Sunt enim 12. numeri in ea progressione) faciunt 492. Huius numeri dimidiũ 246. est summa omnium numerorum datæ progressionis. Eademque ratio est de cæteris.

Hæc regula à nonnullis diuiditur in duo membra, hoc modo. Quando numerus terminorum est par, multiplicant aggregatum ex primo, & vltimo termino per dimidium numeri terminorum. Si vero numerus terminorum est impar, multiplicant dimidium aggregati ex primo, & vltimo termino (quando enim numerus terminorũ est impar, semper illud aggregatum est par) per numerum terminorum. Hac enim ratione semper producitur summa omnium numerorum progressionis. Vel hoc modo. Quando aggregatũ ex primo, & vltimo termino est par, multiplicant eius dimidium per numerum terminornm, siue is par sit, siue impar. Si vero aggregatum illud est impar, multiplicant illud

Summa cuiuscunque progressionis Arithmeticæ quo pacto aliter inueniatur.

lud per dimidium numeri terminorum, qui numerus tunc semper par est. Vt in superiori exemplo, quia numerus terminorum est par, nempe 12. vel quia aggregatum ex primo termino, & vltimo est impar, videlicet 41. multiplicant illud per 6. dimidium numeri terminorum, efficiuntq; summam omnium numerorum 246. vt prius. In his autem duabus progressionibus, in quarum priore numerus terminorum est par, nempe 10. & in posteriori impar, nempe 11. quoniam aggregatum ex primo termino, & vltimo est par, nimirum

3. 7. 11. 15. 19. 23. 27. 31. 35. 39.

4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. 34.

42. in priore, & 38. in posteriore, multiplicãt tam dimidium illius, nimirum 21. per 10. numerum terminorum, quàm dimidium huius, quod est 19. per 11. numerum terminorum, vt in priori efficiant summam 210. & in posteriori 209.

Ratio harum regularum hæc est. Quoniã supra diximus, quando numerus terminorũ est par, aggregatum extremorum æquale esse cuilibet aggregato duorum quorumlibet numerorum ab extremis æqualiter distantium, fit, vt omnia aggregata simul sint tot, quot vnitates sunt in dimidio numeri terminorũ. Quare si vnum aggregatum, nempe extremorum multiplicetur per dimidiũ numeri terminorum, producetur summa omnium aggregatorum. Rursus quia docuimus, quando numerus terminorum est impar. aggregatum extremorum esse æquale cuilibet aggregato duorum quorumlibet numerorum ab extremis

mis æqualiter diſtantium, necnon duplo medii numeri, fit, vt medius numerus ſit dimidium cuiuſlibet aggregati. Ergo omnia aggregata ſimul, vnà cum medio numero, continebunt tot dimidia vnius aggregati, quot ſunt termini. Si igitur dimidium vnius aggregati, nempe extremorum, multiplicetur per numerum terminorum, producetur ſumma omnium terminorum.

Itaque, vt vides, ſatis eſt, vt cognoſcatur primus terminus, & vltimus, vna cum numero terminorum, ad eliciendam ſummã totius progreſſionis, etiamſi intermedij termini ignorentur. Quo pacto autem ex primo numero cognito, vna cum numero terminorum, & differentia progreſſionis, vltimus terminus inueſtigetur, ſequenti regula explicabimus.

In progreſſione autem naturali numerorum, quæ ab 1. incipit, inuenietur i breuiſſime ſumma omnium terminorum, hoc modo. Multiplicetur vltimus numerus (qui ſemper indicat numerum terminorum) per numerum proxime maiorem. Huius enim numeri producti dimidium eſt ſumma omnium terminorum. Vt hic.

Particularis inuentio ſummæ progreſſionis naturalis numerorum.

Numerus terminorum progreſſionis naturalis numerorum eſt vltimus terminus.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11.

Ex multiplicatione vltimi numeri 11. per 12. numerum proxime maiorem producitur numeru[illegible] 2. cuius dimidium 66. eſt ſumma totius progreſſionis. Sic etiam in hac progreſſione.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.

Ex

Ex multiplicatione vltimi numeri 10. per 11. numerum proximè maiorem fit numerus 110. cuius dimidium 55. est totius progressionis summa.

Itaque si quis velit summam progressionis naturalis, quæ terminetur in quouis numero dato, vt in 100. in qua nimirum sint 100. termini, multiplicandus erit vltimus numerus datus, in quo progressio dicitur terminari, vt hic numerus 100. per numerum proxime maiorem, vt hic per 101. Nam producti numeri (qui hic est 10100.) dimidium, nempe 5050. in dato exẽplo, erit summa dictæ progressionis. Eademque ratio est in alijs.

Alia inuentio summæ progressionis naturalis numerorum.

Alij hanc etiam regulam distrahunt in duo membra, hoc modo. Si vltimus numerus est par, multiplicant numerum proxime maiorẽ in dimidium vltimi numeri: Si vero est impar, multiplicant eum in dimidium numeri proxime maioris. Hac enim ratione semper producitur summa omnium numerorũ progressionis. Vt in posteriori progressione naturali, multiplicant 11. numerum proxime maiorem vltimo numero per 5. dimidium vltimi numeri, faciuntque 55. summam totius progressionis, vt prius. In priori autem progressione naturali, multiplicant 11. vltimum numerum per 6. dimidium numeri proximè maioris vltimo numero, efficiuntq; 66. summam totius progressionis, vt prius.

Particularis inuentio summæ numerorum imparium.

In progressione quoque numerorum imparium, quæ ab 1. incipit, inuenietur facillimo negotio summa omnium terminorum, si numerus terminorum in seipsum multiplicetur, vt hic. 1.3.5.

1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19.

Ex multiplicatione numeri terminorum, qui eſt 10. in ſeipſum procreatur numerus 100. qui eſt ſumma totius progreſſionis.

Habetur autem numerus terminorum, ſi vltimo numero adijciatur 1. & compoſiti numeri dimidium ſumatur, vt in dato exemplo, ſi addatur 1. ad 19. fit numerus 20. cuius dimidium 10. indicat numerum terminorum.

Numerus terminorum in progreſſione numerorum imparium quo pacto reperiatur,

Itaque ſi quis velit ſummam progreſſionis numerorum imparium, quæ terminetur in quouis dato numero, vt in 67. addenda erit vnitas ad vltimum numerum, in quo progreſſio terminari dicitur, vt hic ad 67. Nam compoſiti numeri (qui hic eſt 68.) dimidiũ, nẽpe 34. in dato exemplo, dabit numerum terminorũ: qui in ſe multiplicatus producet ſummam illius progreſſionis. Vt in propoſito exemplo, in quo ponuntur 34. termini, ſi multiplicetur numerus 34. in ſe, procreabitur ſumma illius progreſſionis 1156. Atque ita de cæteris.

Particularis inuẽtio ſummæ numerorũ parium.

In progreſſione denique numerorum parium, quæ à 2. incipit, nullo etiam labore reperietur ſumma, ſi dimidium vltimi numeri, quod ſemper indicat numerum terminorum progreſſionis, (ſemper enim tot ſunt termini progreſſionis eiuſmodi numerorum parium, quot ſunt vnitates in dimidio vltimi termini.) multiplicetur per numerũ proxime maiorem illo dimidio. Vt hic.

Numerus terminorum in progreſſione numerorum parium qua ratione inueniatur.

2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20. 22. 24.

Ex multiplicatione 12. (qui numerus eſt dimidium vltimi termini, vel numerus terminorum)

norum) per 13. numerum proxime maiorem illo dimidio, fit numerus 156. hoc est, summa omnium illorum numerorum parium.

Itaque si quis velit summam progressionis numerorum parium, quæ terminetur in quolibet dato numero vt in 100. multiplicãdus erit numerus, qui dimidium conficit numeri vltimi dati, in quo dicitur terminari progressio, vt numerus 50. in dato exemplo, (hic enim dimidium est vltimi numeri dati 100.) per numerum proxime maiorem illo dimidio, vt hic per 51. Productus enim numerus vt 2550. in dato exemplo, erit summa illius progressionis; & numerus terminorum erit 50. in eodẽ exemplo, quot nimirum vnitates sunt in dimidio vltimi numeri. Et sic de alijs.

REGVLA II.

Vltimus terminus cuiuscũq; progressionis Arithmeticæ quo pacto eliciatur ex numero terminorũ vnà cum primo termino, & differẽtia progressiõis.

SI in quauis progressione Arithmetica notus fuerit numerus terminorum; vnà cum primo termino, & differentia progressionis, inueniemus vltimũ terminum, etiamsi intermedios terminos non habeamus, hoc modo. Ex numero terminorum abijciatur 1. reliquus vero numerus per differentiã multiplicetur, ac tandem huic producto primus termin⁹ adijciatur. Numerus .n. cõpositus erit vltimus terminus. Vt si primus termin⁹ alicuius progressiõis sit 3. numerus aũt terminorũ sit 10. & differentia 8. cognoscemus decimum terminum, hoc est, vltimum huius progressionis sine intermedijs, hac ratione. Ex 10. numero terminorũ auferemus 1. & reliquũ

liquum numerum 9. multiplicabimus per 8. differentiam progressionis, producto tandem numero 72. adijciemus 3. primum terminum. Compositus enim numerus 75. est decimus terminus progressionis, cuius primus terminus est 3. & differentia 8. Veluti hic apparet, vbi omnes termini ponuntur.

3. 11. 19. 27. 35. 43. 51. 59. 67. 75.

Itaque si quis hanc quæstionem proponat. Augias Herculi de numero boum, quos habebat, interroganti respondit, boues suos omnes per loca 40. ita esse dispositos, vt quoties in primo loco continentur tres boues, toties in secundo contineantur 5. in tertio toties 7. in quarto toties 9. &c. Accessit Hercules ad primum locum, & reperit boues 30. Quot igitur boues habuit Augias, & quot boues in vltimo loco fuerunt? soluenda erit hoc modo. Quoniam in primo loco sunt decies 3. boues, erunt in secundo loco decies 5. nimirum 50. & in tertio decies 7. nempe 70. & sic deinceps, vt sit progressio quædam Arithmetica; cuius primus terminus sit 30. differentia vero 20. & numerus terminorum 40. Eliciendus ergo est primùm vltimus terminus per regulam, hoc modo. Ex 40. numero terminorum abijciatur 1. & reliquus numerus 39. per 20. differentiam multiplicetur, productoque numero 780. primus terminus 30. adijciatur: Fiet enim vltimus terminus, siue quadragesimus, 810. atque tot boues fuerunt in vltimo loco.

Quæstio de bobus Augiæ.

Deinde vero ex hoc vltimo termino inuẽto & ex primo dato, vnà cũ numero terminorũ

eruenda per primam regulam summa totius progressionis, etiamsi non habeamus intermedios omnes terminos, hoc modo. Primus terminus 30. vltimo termino 810. adijciatur, compositusque numerus 840. per 20. hoc est, per dimidium numeri terminorum, multiplicetur. Productus namque numerus 16800. est summa totius progressionis, atque adeo numerus boum Augiæ. Vt autem videas, quot boues in singulis locis fuerint, atque adeo in vltimo loco fuisse 810. apposuimus hic totam progressionem.

30. 50. 70. 90. 110. 130. 150. 170. 190. 210. 230. 250. 270. 290. 310. 330. 350. 370. 390. 410. 430. 450. 470. 490. 510. 530. 550. 570. 390. 610. 630. 650. 670. 690. 710. 730. 750. 770. 790. 810.

Quæstio de ducib. militiæ.

Similis erit quæstio, si quis ita dicat. Imperator strenuis ducibus numero 20. distribuit pecuniam in direptione vrbis inuentam, hac lege, vt ei, qui vltimus murum hostilem trāscenderat, daret 100. aur. penultimo 130. antepenultimo 160. & ita deinceps eodem modo progrediendo. Quanta ergo fuit ea summa pecuniæ, & quantum, qui primus murum transcendit, accepit? Si namque ex 20. numero terminorum (tot enim sunt termini in illa progressione, quot sunt duces.) auferas 1. & reliquum numerum 19. multiplices per 30. differentia progressionis, productoque numero 570. adijcias primum numerum, nempe 100. efficies 670. pro vltimo progessionis termino: atque tot aureos habuit primus dux. Inuento autem vltimo termino, si ei addatur

primus

primus, nimirum 100. vt fiant 770. atque hic numerus per 10. dimidium numeri terminorum multiplicetur, fiet summa omnium terminorum 7700. Tanta ergo fuit summa pecuniæ distributæ. Tota vero progressio ita se habet.

100. 130. 160. 190. 220. 250. 280. 310. 340. 370.
400. 430. 460. 490. 520. 550. 580. 610. 640. 670.

PROGRESSIONES GEOMETRICAE.

CAP. XXV.

PRogressio Geometrica est series pluriũ numerorum se in eadem proportione superantium, vt hic apparet. Progressio Geometrica quid.

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256. 512. 1024. 2048. &c.
1. 3. 9. 27. 81. 243. 729. 2187. 6561. 19683. &c.
3. 6. 12. 24. 48. 96. 192. 384. 768. 1536. &c.

Prima enim harum progressionum progreditur per proportionem duplam, ita vt quilibet numerus sit duplo maior eo numero, qui eum proxime præcedit; Secunda vero per triplam, ita vt quilibet numerus sit triplo maior eo, qui proxime eum antecedit; atque vtraque harum progressionum ab 1. incipit; tertia denique per duplam etiam proportionem progreditur, non tamen ab 1. sed à 3. initium sumit.

Continuatur quælibet progressio Geometrica;

Geometrica progressionis quo pacto continuetur.

Denominator proportionis in progressione Geometrica quo inueniatur.

trica; si per denominatorem proportionis numerus ille, post quem progressio extendēda est, multiplicetur. Vt sit progressio hæc proportionis triplæ, 4. 12. 36. continuanda sit, multiplicabimus vltimum numerum 36. per 3. denominatorē proportionis, (quē quidem denominatorem inueniemus, si secundū numerum per primum diuidamus, vel quemuis alium per proxime minorem in eadē progressione.) efficiemusque 108. Hunc iterum numerum per 3. multiplicabimus, producemusque 324. & ita deinceps in infinitum. Sic etiam, si quis progressionem incipere velit à 7. & progredi per proportionem quincuplā, cuius denominator est 5. multiplicanda erūt 7. per 5. vt fiant 35. pro secundo numero progressionis. Item 35. per 5. vt fiant 175. pro tertio numero, &c.

Pari ratione progressio Geometrica continuatur retrocedendo, si minus extremum per denominatorem diuidatur. Vt si progressio hæc 64. 128. 256. 512. continuanda sit versus minores numeros, cum denominator proportionis sit 2. diuidemus 64. per 2. faciemusque 32. quæ rursum partiemur per 2. inueniemusque 16. & sic deinceps in infinitum. Vt in hoc exemplo apparet,

512. 256. 128. 64. 32. 16. 8. 4. 2. 1. $\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{8}\frac{1}{16}$. &c.

Progressio Geometrica decrescit in infinitum.

Et nunquā erit finis huius decrementi in progressione Geometrica. Sic quoque, si quis progressionem inchoare velit à 100. & progredi versus vnitatem per proportionem sesquialteram, cuius denominator est $1\frac{1}{2}$. diuidemus

100.

100. per $1\frac{1}{2}$. vt habeamus $66\frac{2}{3}$. Item $66\frac{2}{3}$. per $1\frac{1}{2}$. vt habeamus $44\frac{4}{9}$. &c.

Proprium est progressionis Geometricæ trium numerorum, vt numerus qui ex primo numero in tertiũ producitur, æqualis sit numero, qui ex medio fit in seipsum multiplicato. Vt hic apparet, 3. 9. 27. demonstraturq; ab Euclide lib. 7. propos. 20. Proprietas ꝓgressionis Geometricæ trium terminorum.

Progressionis vero Geometricæ quatuor numerorum proprium est, vt numerus qui ex multiplicatione primi numeri in quartũ fit, æqualis sit numero, qui ex secundo in tertiũ procreatur. Vt hic vides, 2. 6. 18. 54. demonstraturque ab Euclide lib. 7. propos. 19. Atq; hoc non solum est in quatuor numeris continue proportionalibus, quales sunt quatuor numeri in dato exemplo, sed etiam in quatuor, qui non sunt continue proportionales, dummodo eadẽ sit proportio secundi ad primum, quæ quarti ad tertium. Vt hic cernis, 3. 6. 10. 20. Proprietas ꝓgressionis Geometricæ quatuor terminorum.

Ex his proprietatibus colligitur, in omni progressione Geometrica, cuius numerus terminorum est impar, numerum, qui fit ex multiplicatione extremorum inter se, æqualem esse numero, qui ex multiplicatione duorum numerorum quorumlibet ab extremis æqualiter distantium producitur, necnon numero, qui ex medio in seipsum fit. Veluti hic apparet. Proprietas ꝓgressionis Geometricæ quotcũq; terminorum, si numerus terminorum sit impar.

3. 6. 12. 24. 48. 96. 192. 384. 768.

Cum enim quatuor hi numeri 3. 6. 384. 768. hab eant eandẽ proportionẽ, licet non conti-

nuam, erit, ex ijs, quæ proxime diximus, numerus, qui fit ex 3. in 768. æqualis ei, qui fit ex 6. in 384. Eadem ratione numerus, qui fit ex 6. in 384. æqualis erit ei, qui ex 12. in 192. producitur, quod hi quatuor numeri 6. 12. 192. 384. eandem habeant proportionem, licet non continuatam; & ita de reliquis, si plures sint, donec ad tres medios 24. 48. 96. perueniamus; qui cum eandem habeant proportionem, erit, per ea, quæ paulo ante docuimus, numerus productus ex primo in tertium æqualis numero, qui ex medio in seipsũ gignitur. Eademq; ratio est de omnibus alijs huiusmodi progressionibus Geometricis.

Proprietas progressionis Geometricæ quotcunque terminorũ, si numerus terminorũ sit par.

Ex posteriore quoque proprietate efficitur, in omni progressione Geometrica, cuius numerus terminorum est par, numerum ex multiplicatione extremorum productum æqualem esse numero, qui ex multiplicatione duorum quorumlibet numerorum ab extremis æqualiter distantium producitur. Vt hic manifestum est.

3. 6. 12. 24. 48. 96. 192. 384.

Quod probabimus, vt prius, hoc dempto, quòd postremo loco sumendi sunt quatuor numeri medij 12. 24. 48. 96. non autem tres tantum, vt prius; quia hic non est vnicus numerus medius, sed duo. Sequuntur iam regulæ ad progressiones Geometricas spectantes.

REGVLA I.

SI in quauis progressione Geometrica notus fuerit denominator proportionis, vnà cum

cum minore, & maior extremo, perueniemus in cognitionem summæ omnium terminorũ, hac ratione. Detrahatur primus terminus ab vltimo, & reliquus numerus per numerum, qui vna vnitate minor sit, quã denominator, diuidatur. Si enim Quotienti vltimus terminus, siue maius extremum adijciatur, componetur summa omnium terminorum. Vt in hac progressione.

Summa cuiuscũq; progressionis Geometricæ quo pacto inueniatur.

3. 12. 48. 192. 768. 3072. 12288. 49152.

Demptis 3. ex 49152. remanent 49149. Et quoniam denominator proportionis quadruplæ, quam habent numeri datæ progressionis, est 4. diuidemus 49149. per 3. & Quotienti 16383. vltimum terminum, siue maius extremum 49152. adijciemus, conficiemusque summam totius progressionis 65535. Itẽ hic.

4. 6. 9. $13\frac{1}{2}$. $20\frac{1}{4}$. $30\frac{3}{8}$. $45\frac{9}{16}$.

Subtractis 4. ex $45\frac{9}{16}$. relinquuntur $41\frac{9}{16}$. quæ si diuidantur per $\frac{1}{2}$. (Est enim $1\frac{1}{2}$. denominator proportionis sesquialteræ, quam habẽt numeri huius progressionis, ablata autem 1. remanet $\frac{1}{2}$.) fiet Quotiens $83\frac{1}{8}$. cui si addatur vltimus numerus, siue maius extremum $45\frac{9}{16}$. fiet summa totius progressionis $128\frac{11}{16}$. atq; eodem modo summam cuiuscunq; progressionis Geometricæ inueniemus.

Itaq;, vt vides, satis est, vt cognoscatur primus terminus, & vltimus, vnà cum denominatore proportionis, ad inueniendam summam totius progressionis, etiamsi intermedij

termini ignoretur. Quo pacto autem in cognitionem vltimi termini peruenire possimus, licet non continuetur tota progressio, sequenti regula explicabimus.

Particularis inuẽtio sũmæ ꝓgressionis ꝑportionis duplæ cuius initiũ est 1.

In progressione autem Geometrica duplæ proportionis, cuius initiũ est 1. facillimo negotio summa totius progressionis quotcunq; terminorum reperietur, si vltimus terminus duplicetur, & à duplo abijciatur 1. Vt hic.

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256. 512.

In ꝓgressione proportionis duplæ incipiẽte ab 1. qlibet numerus, abiecta prius vnitate, est summa omniũ antecedentium numerorũ.

Si vltimus terminus 512. duplicetur, & à duplo 1024. reijciatur 1, habebitur summa totius progressionis 1023.

Ex quo fit, quemlibet numerũ, in huiusmodi progressione, abiecta prius vnitate, esse sũmam omnium numerorum antecedentium, cum quilibet numerus sit proxime præcedentis numeri duplus.

REGVLA II.

Si in progressione Geometrica incipiẽte ab 1. numerus aliqs seipsum, vel alium numerum multiplicet, quem locum numerus

IN omni progressione Geometrica, quæ ab 1. incipit, quiuis numerus seipsum multiplicans gignit numerum, qui ab eo abest tanto interuallo, quãto ipse ab vnitate distat: quiuis autem numerus alium maiorẽ multiplicans producit numerum, qui à maiore tanto interuallo distat, quãto ipse minor ab vnitate abest. Hæc regula clarissime ex propos. 11. lib. 8. Euclidis colligitur, vt in scholio eiusdem propos. declarauimus. Exempli gratia in hac progressione duplæ proportionis, quæ se-

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256. 512. 1024.

quitur,

quitur, si numerus 16. qui quintum locum ab vnitate occupat, in seipsũ multiplicetur, producetur numerus 256. qui quintum etiam locum à numero 16. occupat, nempe nonum. Sic quoq; si numerus 32. sextum locum ab vnitate occupans seipsum multiplicet, procreabitur numerus 1024. qui sextum etiam locum à numero 32. occupat, nimirum vndecimum. Ita etiam numerus 8. quarti loci multiplicãs numerum 64. producit numerum 512. quarto loco à numero 64. reponendum. producti occupet.

Itaque hanc licebit regulam colligere. Si in progressione Geometrica, cuius initium est 1. numerus aliquis quemcunque locum occupans seipsum multiplicet, procreabitur numerus in duplo maiore loco minus vna vnitate, quàm sit locus numeri multiplicantis, ponendus. Vt si numerus seipsum multiplicans occupet tertium locum, gignetur numerus in quinto loco reponendus: si occupet septimum locum, producetur numerus in tertiodecimo loco ponendus, &c. Id quod aperte ostensum est in progressione superiori proportionis duplæ, idemq; clarissime in hac altera progressione proportionis quadruplæ apparet.

Quilibet numerus in ꝓgressiõe Geometrica incipiẽte ab 1. seipsũ multiplicãs ꝓducit numerũ in duplo maiore loco minus vnitate, q̃ numerus multiplicãs, ponẽdum.

1. 4. 16. 64. 256. 1024. 4096. 16384. 65536.

Nã si numerus 64. in quarto loco positus, seipsum multiplicet, gignetur numerus 4096. in septimo loco ponendus. Ita quoq; numerus 256. quintum occupans locum seipsum multiplicans

plicans producit numerum 65536. in nono loco reponendum.

Progressio naturalis numerorũ quo pacto indicet, quo in loco quilibet numerus productus collocandus sit in progressiõe Geometrica incipiente ab 1.

Vt autem facilius sciatur, quo in loco quilibet numerus productus sit collocãdus, subscribenda est progressioni Geometricæ progresio naturalis numerorum hoc ordine. Sub 1. hoc est, sub primo numero, scribatur 0. sub secundo numero ponatur 1. sub tertio 2. sub quarto 3. & ita deinceps, vt in hac progressione proportionis duplæ factum est.

1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256	512.	1024.	2048.
0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.

Nam quilibet numerus progressionis Geometricæ seipsum multiplicans producit numerum supra illum numerum progressionis naturalis numerorum collocandum, qui duplus est illius, qui subscribitur numero seipsum multiplicanti: quilibet vero numerus alium multiplicans procreat numerum supra illum numerum progressionis naturalis numerorum reponendum, qui componitur ex duobus numeris, qui numeris multiplicantibus subscribuntur. Vt si numerus 32. in se multiplicetur, procreabitur numerus 1024. supra 10. collocandus, quòd numerus 10. duplus sit numeri 5. qui numero 32. subscribitur. Item ex multiplicatione 8. in 256. producetur numerus 2048. supra 11. reponendus, quod numerus 11. componatur ex 3. & 8. qui numeri sub 8. & 256. scripti sunt.

Et quoniam, quot vnitates sunt in quolibet numero progressionis naturalis numerorum, talem locũ vno amplius occupat in progres-
sione

ſione Geometrica numerus illi ſuprapoſitus, vt in ſuperiori exemplo perſpicue apparet; facile inueniemus numerum cuiuſq; loci in progreſſione Geometrica, etiamſi non ſcribamus omnes numeros intermedios. Sit enim inueniendus, verbi gratia, numerus in vigeſimo loco ſupradictæ progreſſionis collocandus. Primū ſcribo quatuor, aut quinq;, vel plures numeros progreſſionis, vnà cum progreſſione naturali, vt hic vides.

Quo pacto numerus cuiuſcunq; loci in progreſſione Geometrica incipiente ab 1. inueſtigetur ſine intermedijs.

1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.
0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.

Deinde multiplico. v.g. 8. in ſe, facioq; 64. numerum ſeptimi loci, ſub quo nimirum poſitus eſt numerus 6. vna vnitate minor numero locorum; quòd numerus 3. ſub 8. duplicatus faciat 6. Quòd ſi multiplicemus 8. in 64. faciemus 512. numerum decimi loci, ſub quo nimirum ſcriberetur numerus 9. vna vnitate minor numero locorum, quòd numeri 3. & 6. ſub quarto & ſeptimo loco faciant 9. Rurſus ſi 512. numerum decimi loci, ſub quo ponitur numerus 9. multiplicemus in ſe, producemus numerum 262144. in loco decimonono ſcribendum, ſub quo nimirum poneretur numerus 18. vna vnitate minor numero locorum, propterea quòd numerus 9. ſub decimo loco duplicatus facit 18. Iam vero quia ex 18. qui numerus ſub decimonono loco ſcribitur, & ex 1. ſub ſecundo loco poſita fiunt 19. ſi multiplicemus numerum 2. ſupra 1. poſitum per numerum 262144. ſupra 18. poſitum, conficiemus numerum 524288. in viceſimo loco, ſub quo vide-

videlicet numerus 19. ponitur, ſcribendum.

Rurſus, ſi quis velit in eadem progreſſione numerum in decimooctauo loco reponendum, multiplicabimus numerum 32. ſub quo ponuntur 5. in ſeipſum, producemuſque numerum 1024. in vndecimo loco ſcribendum, ſub quo numero ponitur numerus 10. qui duplus eſt numeri 5. Et quoniam ex 10. qui numerus ſub vndecimo loco ponitur, & ex 6. qui numerus ponitur ſub ſeptimo loco, ſiunt 16. qui numerus ſub loco decimo ſeptimo ſcribitur, ſi numerum 64. ſeptimi loci per numerum 1024. vndecimi loci multiplicemus, procreabimus numerum 65536. loci decimiſeptimi. Tandem quia ex 16. qui numerus ſub decimoſeptimo loco ponitur, & ex 1. quæ ſub ſecundo loco ponitur, fit numerus 17. qui ſub decimooctauo loco ſcribitur; ſi multiplicemus numerum inuẽtum 65536. decimiſeptimi loci per numerum 2. ſecundi loci, gignemus numerum 131072. in loco octauodecimo ſcribẽdum, ſub quo videlicet ponitur numerus 17.

Quę dicta ſunt in hac regula de progreſſione Geometrica incipiente ab 1. vera etiã eſſe de progreſſione Geometrica incipiẽte non ab 1. ſed ab alio numero.

Hæc omnia quadrant etiam in progreſsionem quamcunque Geometricam non ab 1. ſed à quouis alio numero incipientem, dummodo quemlibet numerum ex multiplicatione productum diuidamus per primum numerũ progreſſionis. Quotiens enim erit numerus quæſitus. Vt in hac progreſſione proportionis

5.	10.	20.	40.	80.	160.	320.	640.	1280.	2560.	5120.
0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9	10.

duplæ apparet. Nam ſi numerus 80. quintum locum

locum à primo numero occupans in ſeipſum multiplicetur, procreabitur numerus 6400. quo diuiſo per primum numerum, vtpote per 5. fiet Quotiens 1280. in quinto loco à numero 80. collocandus, nempe in nono loco, ſub quo ponitur numerus 8. qui duplus eſt numeri 4. ſub numero 80. multiplicãte poſiti. Vbi vides, numerũ 80. quinti loci, cũ ſeipſum multiplicat, producere numerũ, quo diuiſo per primũ numerum progreſſionis, fit Quotiens 1280. in duplo maiore loco, minus vnitate, quàm ſit locus numeri multiplicantis, reponendus. Sic etiam, ſi numerus 40. quarti loci multiplicet numerum 640. & productus numerus 25600. per primum numerũ 5. diuidatur, fiet Quotiẽs 5120. quarto loco à numero 640. ſcribendus, nempe loco vndecimo, ſub quo ponitur numerus 10. cõflatus ex 3. ſub 40. & ex 7. ſub 640. Quòd ſi numerum 1280. multiplicemus per 5120. procreabimus numerum 6553600. quo diuiſo per primum numerũ 5. reperiemus Quotientem 131720. reponendum in loco decimonono, qui nimirum vnitate ſuperat numerum 18. conflatum ex numeris 8. ac 10. poſitis ſub numeris multiplicantibus.

Ita quoque (vt in alia progreſſione exemplum etiam ponamus.) in hac progreſſione

2.	14.	98.	686.	4802.	33614.	235298.
0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.

1647086.	11529602.	80707214.
7.	8.	9.

proportiõis ſeptuplæ, ſi numerus 4802. quintũ locum

regula progressionum Arithmeticarum adhibuimus.

Quoniam vero in prima regula diximus, numerum quemcunque in progressione Geometrica proportionis duplæ incipiente ab 1. abiecta prius vnitate, summam esse omnium antecedentium numerorum; in hac autem secunda regula docuimus, quemlibet numerum progressionis Geometricæ ab 1. incipientis, si seipsum multiplicet, gignere numerum in duplo maiore loco, minus vnitate, quàm sit locus numeri se multiplicantis, ponendum: fit, vt si summæ quotcunque numerorum progressionis Geometricæ proportionis duplæ ab 1. incipientis addatur 1. & aggregatum in seipsum multiplicetur, producatur summa, abiecta prius vnitate, duplo plurium numerorum eiusdem progressionis: quia prior summa, addita vnitate, constituit proxime sequentem numerum in eadem progressione, qui numerus seipsum multiplicans producit numerum in duplo maiore loco, minus vnitate, quàm sit locus numeri multiplicantis, reponendum; ac proinde, abiecta vnitate, idem numerus summa erit omnium antecedentium numerorum, qui quidem duplo plures sunt, quàm priores, quorum summa accepta fuit. Exempli gratia, summa septẽ terminorum, addita vnitate, constituit octauũ terminum, qui multiplicatus in se producit terminum decimumquintum, nempe numerũ in duplo maiore loco, quàm sit octauus, minus vnitate, ponendum; qui quidem, abiecta vnitate, summa erit quatuordecim ante-

Summa quotcũq; terminorũ ꝓgressiõis Geometricæ ꝓportionis duplæ ab 1. incipiẽtis, addita prius vnitate, seipsam multiplicãs producit numerũ, qui, abiecta pri° vnitate, sũma est duplo plurium terminorũ.

tecedentium terminorum, nimirum duplo plurium, quàm ſeptem, quorum ſumma accepta fuit. Eademq; ratio eſt de cæteris.

Quo pacto facile inueniatur sũma 64. locorum progreſsiõis Geometricæ duplæ ꝓportionis ab 1. incipientis.

Itaque ſi quis breuiter cupiat inuenire ſũmam 64. terminorum progreſſionis Geometricæ proportionis duplæ ab 1. incipientis, quot nimirum loca ſunt in ludo latrunculorum, quem ſcacchiorum ludum vocant, accipienda erit primum ſumma horum quatuor terminorum 1. 2. 4. 8. nempe 15. Deinde, addita vnitate, multiplicandum aggregatum 16. in ſe. Si enim ex numero producto 256. abijciatur 1. erit ſumma octo terminorum 255. Rurſus, addita 1. multiplicandum aggregatum 256. in ſe, vt fiant 65536. ac proinde ſumma 16. terminorum 65535. Quòd ſi rurſus, addita 1. aggregatum 65536. in ſe multiplicetur, procreabitur numerus 4294967296. qui, abiecta prius vnitate, dabit ſummam 32. terminorum. Postremo ſi 4294967296. in ſe multiplicentur, fiet numerus 18446744073709551616. qui, abiecta prius vnitate, dabit ſummam 64. terminorum. Atque tot quatrini requiruntur, vt quis replere poſſit omnia 64. loca dicti ludi latrunculorum, ponendo 1. quatrinum in primo loco; 2. quatr. in ſecundo; 4. in tertio; 8. in quarto, & ſic deinceps progrediendo per duplam proportionem: qui efficiunt aureos, (tribuẽdo ſingulis aureis 400. quatrinos) 46116860184273879$\frac{3}{80}$. quanta pecunia vix in toto vno regno, vel etiam pluribus, aut toto mundo, reperitur; quod multis incredibile videtur.

Quãta pecunia requiratur, vt impleantur 64. loca ludi latrunculorũ, ita vt in primo loco ponatur 1 quatr. in ſecũdo 2. in tertio 4. & ita deinceps ꝓgrediẽdo per proportionem duplam.

Immo vix tot grana frumenti in vniuerſo

orbe

orbe terrarum existũt, quot in dictis 64. locis continerentur, si in primo ponetur 1. granum, in secundo 2. in tertio 4. &c. quod ita perspicuum faciemus, licet multis omnino incredibile videatur. Secundum Medicos, & pharmacopolas, grana 60. efficiũt 1. drachmã; id est, $\frac{1}{8}$. vnius vnciæ; ac proinde 480. grana 1. vnciam, & 5760. grana 1. libram. Cum ergo 500. libræ communiter constituant 1. mensu- r[illegible] Rubium dicunt, & au- parum ab illa mensura differt, quam Nautæ in Italia Salmam appellant; constabit 1. Rubius granis 3456000. Quare si grana 18446744073709551615. quæ in dictis 64. locis continentur, per grana 3456000. vnum Rubium constituentia diuidantur, prodibũt Rubij 5337599558365. & paulo amplius: quot vix in toto terrarum orbe arbitror simul reperiri. Nam cum communiter nauis oneraria ferat Rubios 3000. requirerentur, vt minimum, ad frumentum illud portandum naues. 1779199852. ad quas onerandas vix satis esse totius mundi frumentum, facile sibi quiuis persuadebit. Quòd si in toto mundo vix sunt 18446744073709551615. grana frumenti, multo minus tot quatrini existẽt, etiamsi omnes monetæ in quatrinos resoluerentur: cum nulli dubium sit, maiorem in mundo frumenti esse copiam, quàm pecuniæ. Quod etiam hinc colligi potest.

Quot grana frumẽti constituãt vnũ Rubium.

Quot naues requirantur ad ferẽdum frumẽtũ in 64. locis ludi latrunculorum positum.

Quoniam ducatus aureus Romæ æstimatur baiochis 115. siue quatrinis 460. si quatrini 18446744073709551615. in dictis locis 64. cõtẽti diuidãtur p baiochos 115. hoc est, per quatrinos

trinos 460. efficientur ducati aurei 40101617551542503. & paulo amplius. Quia vero 100. ducati aurei faciunt 1. libram, continebunt 1800. 000. libræ aureos ducatos 180000000. quot nimirũ cõmode vna nauis oneraria ferre potest, cũ rubij frumenti 3000. vnam nauem onerantes faciant libras 1800000. ꝗ pondus multis partibus superat Obeliscum illũ immensum, qui Romæ iuxta templũ S. Petri visitur, quippe cum hic, vt periti [illegible] neat libras duntaxat [illegible]. quem tamen vix ferri posse ab vna naue, facile sibi persuadebit qui eius molẽ diligẽtius intueatur. Quod ideo dixerim, ne quis putet, parum nos vni naui tribuere, cum ei concedimus libras 1800000. hoc est, rubios frumenti 3000. siue aureos ducatos 180000000. Ex quo fit, ad aureos ducatos 40101617551542503. vehendos necessarias esse naues 222786764. & amplius: quis autem dubitet, totius mundi pecuniam etiamsi ad aureos ducatos reducatur, tantam non esse, vt tot naues oneret?

Quot naues requirantur ad ferẽdã pecuniã in 64 locis ludi latrũculorũ positã, si ad aureos reduceretur.

Quod si quis in primo loco ponat 1. quatrinum, vel granũ; 2. in secundo; 6. in tertio; 18. in quarto; 54. in quinto, & sic deinceps, ita vt vnitates in quolibet loco positæ sint duplo plures quàm in omnibus præcedentibus locis simul: quod tum demum fiet, si vnitates secundi loci triplices, & productum numerum rursus triplices, atque ita deinceps, vt in hac progressione manifestum est, & ita ostendi

In ꝓgressione cui⁹ prim⁹ terminus est 1. secund⁹ 2. tertius vero secũdi triplus & similiter quart⁹

1. 2. 6. 18. 54. 162. 487. 1458. 4374. 13122. &c.

potest. Quoniam [illegible]itates cuiuslibet loci duplæ

duplæ ſunt vnitatum in omnibus præcedentibus locis poſitarum, continebunt dictæ vnitates bis vnitates proxime antecedentis loci, & vnitates omnium quoque aliorum locorũ præcedentium bis. Cum ergo vnitates proxime antecedentis loci bis contineant vnitates omnium locorum antecedentium, comprehendent vnitates proxime antecedentis loci ter. Verbi gratia, quoniã vnitates 18. in quarto loco duplę ſunt harum vnitatum 1. 2. 6. continebunt dictæ vnitates 18. bis vnitates 6. ac præterea vnitates 1. 2. bis. Quare cum vnitates 6. duplæ quoque ſint vnitatum 1. 2. continebunt eædem vnitates 18. bis vnitates 6. & inſuper ſemel, nempe vnitates quoque 1. 2. bis; ac pronde ſi triplicentur vnitates 6. producentur vnitates 18. ſequentis loci, quæ triplæ quidem ſunt vnitatum proxime antecedentis loci, duplæ vero omnium præcedentium locorum. Eademq; ratio eſt in cæteris. Quod ſi quis, inquã, hac ratione ponat quatrinos, vel grana in dictis 64. locis, reperietur sũma multo maior, quàm prius.

tertij tripl⁹, & ita deinceps: quilibet terminus dupl⁹ eſt omnium præcedentium terminorũ.

Hoc autem modo ſumma elicietur, etiamſi non ponantur omnes numeri illius progreſſionis. Quoniam omnes numeri progrediuntur per proportionem triplam, initio facto à ſecundo loco; inueſtigandus erit numerus loci ſexageſimi tertij in proportione tripla, cuius principium eſt 2. Hic enim numerus inuẽtus occupabit locum 64. in ludo latrunculorum, atq; eo cognito reperietur sũma omnium 63. locorũ, vt in prima regula progreſſionum

Qua arte inueniatur sũma 64 terminorũ ab 1. incipientiũ atq; ita ꝓgredientiũ, vt qlibet duplus ſit omniũ antecedẽtiũ terminorum.

num Geometricarum docuimus; cui si adijciatur 1. in primo loco dicti ludi posita, habebitur summa omnium 64. locorum. Exempli gratia. Positis his quinq; terminis, 2. 6. 18. 54. 162. si quintus in se multiplicetur, productusque per primũ diuidatur, producetur numerus 13122. nono loco ponẽdus, nempe in duplo maiore loco, minus vnitate, quam est locus numeri in se multiplicati, vt in secũda hac regula docuimus. quòd si rursum numerus 13122 noni loci in se multiplicetur, productusq; per primum, hoc est, per 2. diuidatur, gignetur numerus 86093442. septimodecimo loco ponẽdus: qui si rursum in seipsum multiplicetur, productusque per primum diuidatur, fiet numerus hic sequens 3706040377703682. tricesimo tertio loco ponendus: qui rursum si multiplicetur in se, productusque diuidatur per primum, procreabitur numerus 6867367640585024969315698178562. loco sexagesimo quinto locandus. Nos autem quærimus numerum sexagesimi tertij loci, ad quem inuentus numerus sexagesimi quinti loci proportionem habet triplæ duplicatam, hoc est, noncuplam, ex defin. 10. lib. 5. Eucl. propterea quòd numeri positi in loco sexagesimo tertio, sexagesimo quarto, & sexagesimo quinto continuam proportionem triplam habent. Quare si numerum inuentum per 9. partiamur, reperiemus numerum hunc sequentẽ 763040848953391663257299797618. loco sexagesimotertio reponendum.

Detracto iam primo numero 2. & residuo diuiso per numerum vnitate minorem deno-

denominatore proportionis triplæ, nēpe per 3. Quotiente denique ad numerum inuentum sexagesimitertij loci adiecto, fiet summa omnium sexagintatrium locorum, cui si apponatur 1. in primo loco ludi latrūculorum posita, componetur summa omnium 64. locorū dicti ludi hæc sequens.

114456127343083749488594969642 7.

Hanc eandem summam ita quoque inueniemus. Multiplicetur summa trium primorum locorum ludi latrunculorum, quæ est 9. in se, fietque summa 81. duplo plurium locorum minus vno, hoc est, quinque locorum: quę si rursus in se multiplicetur, fiet eadem ratione summa 6561. nouem locorum, nempe duplo plurium, quam quinque, minus vno: quæ rursus multiplicata in se producet summam 43046721. septemdecim locorum: Hæc iterum in se multiplicata faciet hanc summam 1853020188851841. trigintatrium locorum: quæ in se rursum multiplicata, gignet summam

3433683820292512484657849089281.

sexagintaquinque locorum. Nos autem quærimus summam sexaginta quatuor tantū locorum, quæ in summa inuenta ter continetur. Nam summa quotcunque locorum tripla est summæ omnium locorum præcedentium: propterea quòd numerus vltimi loci, nempe (in dato exemplo) sexagesimi quinti, duplus est omnium præcedentium locorum. Hinc enim fit, vt addita summa omnium præcedentiū locorum ad numerū sexagesimiquinti loci, fiat summa omniū sexagintaquinque locorum, continens nimirum ter summā

Alia ratio inueniendi sūmā 64. terminorū ab 1. incipientium atq; ita progredientiū, vt quilibet omnium antecedētium terminorū sit dupl.

Quantum frumẽtũ requiratur vt impleantur 64. loca ludi latrunculorum ita in primo loco ponatur 1. granũ, in secundo 2. in tertio 6. in quarto 18. & ita deinceps vt grana subsequẽtis loci sint dupla omnium granorũ in præcedẽtib9 omnibus locis simul. Et quot naues necessariæ sint ad illud frumentũ portãdũ.

præcedẽtium sexagintaquatuor locorũ. Quocirca diuisa summa inuenta per 3. reperietur

11445612734308374948859496964427.

summa hæc sexaginta quatuor locorũ ludi latrunculorum vt prius.

Hæc omnia grana, si diuidãtur per 3456000. quot vnum Rubium constituunt, efficient Rubios sequentes, 3311809240251265899554 25 $\frac{33201}{128000}$. ad quos vehendos, impositis 3000. Rubijs in quamlibet nauem, necessariæ sunt naues numero 110393641341708863318$\frac{12}{40}$. quæ 102714380. globos ex terra & aqua confectos contegerent. Ponimus .n. supremã areã vnius nauis æquiualere quadrato, cuius latus continet 70. palmos, quibus Mechanici, atq; Architecti vtuntur: cũ plerunq; longitudo nauis sit 120. palmorũ, latitudo aũt 40. si ad parallelogrammum rectangulum redigeretur; atq; adeo area ipsius contineat palmos quadratos 4800. cuius radix quadrata fere est 70. Cum ergo 5500. palmi, plus minus, conficiant vnum milliare, ac propterea palmi 133750000. milliaria 22500. quot in toto ambitu terræ continentur; si partiamur hos palmos per 70. hoc est, per latitudinem, longitudinemve vnius nauis quadratæ, reperiemus in toto ambitu terræ contineri naues 1910714. se inuicem tangentes. Eodem modo conficient palmi 39374500. totam terræ diametrum milliaria 7159. complectentem: quos palmos si rursus per 70. partiamur, inueniemus in terræ diametro comprehendi naues se inuicem tangentes 562493. ferè. Multiplicantes autem

naues

naues 562493. diametri per 1910714. naues ambitus, faciemus naues 1074763250002. totam ſuperficiem terræ mariſque tegentes, vt ad finem primi cap. ſphæræ ſcripſimus: per quas ſi diuidamus illas ſuperiores 110393641341708 86318. naues quæ ad frumentum aſportandũ requiruntur, deprehendemus globos ex terra marique confectos 102714380. & quidem omnes nauibus ad frumentum portandum neceſſarijs contectos: quæ ſumma frumenti multis partibus ſuperat frumẽtum totius orbis, cum ne vnam quidem terram operire poſſint naues, in quibus totius orbis frumẽtum contineretur, vt patet.

Quot naues totã ſuperficiem terræ & maris operirẽt ſi ſe mutuo tangerent.

Alia ratione incomprehenſibilem hanc multitudinem frumenti explicabimus, ſi nimirum inquiramus, quot globi, ſiue ſphæræ ex illis granis, quæ poſteriori modo in 64. locis ludi latrunculorum continentur, confici poſſint, quarum ſphærarum quælibet globo terreſtri ſit æqualis: quod ita fiet. Quoniam grana frumenti rotunda non ſunt, ſumemus pro ipſis grana coryandri, quæ rotunda ſunt, licet paulo minora ſint, quam frumenti grana. Ita enim fiet, vt plures globi conficiantur ex granis frumenti, quàm ex granis coryandri, cum pauciora illorum requirantur, quã horum, ad vnum globum conſtituendum, ſitque tanta multitudo illorum, quanta horum, in 64. locis ludi latrunculorum. Quia igitur 18. grana coryandri (vt experientia deprehẽſum eſt à me) conſtituunt quartam partem pedis Geometrici, & paulo amplius, fit, vt recte dicere poſſimus, 70. grana ſecundum

Quot globi ex terra ac mari confecti tegerentur à nauibus, quæ neceſſariæ ſunt ad ꝓximè dictum frumentum portandum.

longitudinem diſpoſita explere longitudinẽ vnius pedis. Quare cum ſphæræ triplicatam ſuarum diametrorum proportionem habeãt, vt Euclides demonſtrauit lib. 12. propoſ. 18. continebuntur in ſphæra, cuius diameter pedi Geometrico æqualis eſt, grana coryandri 343000. cum hic numerus ad 1. proportionem habeat triplicatam eius, quam habet pes Geometricus 70. granorum ad 1. vt hic apparet.

1. 70. 4900. 343000.

Rurſus quia 5000. pedes Geometrici vnum milliare conſtituunt, habebit eadem ratione ſphæra, cuius diameter vni milliario, æqualis ſit ad ſphæram, cuius diameter æqualis ſit vni pedi, proportionem, quam ad 1. habet hic numerus 125000000000. cum numerus hic ad 1. habeat proportionem triplicatam eius, quam 5000. pedes habent ad 1. vt hic vides.

1. 5000. 25000000. 125000000000.

Quare cum ſphæra habens diametrum pedalem contineat grana coryandri 343000. exiſtent in ſphæra, cuius diameter vni milliario ſit æqualis, grana 42875000000000000.

Deinde quoniam diameter terræ complectitur milliaria 7159. ponamus nos eam continere 7200. milliaria. Quo poſito, habebit tota ſphæra terræ ad ſphæram, cuius diameter vni milliari eſt æqualis, proportionem, quam hic numerus 373248000000. ad 1. propterea quod numerus hic ad 1. proportionem habet

habet triplicatam eius, quam habent 7200. milliaria totius diametri terræ ad 1. milliare, vt hic manifestum est.

1. 7200. 5184000. 373248000000.

Quot globos toti terræ æquales constitueret frumentum in 64. locis proxime dictis contentum.

Quocirca cum sphæra diametri vnius milliarij cōprehendat grana 428750000000000. complectetur totus globus terræ grana numero 160030080000000000000000000. Si igitur per hunc numerum partiamur numerum granorum omnium in illis 64. locis ludi latrunculorum contentum, efficiemus globos terræ 71½. & amplius. Tot ergo sphæræ, quarum quælibet toti terræ sit æqualis, requiruntur ex granis coryandri compositæ, vt dicta 64. loca repleri possint eo modo, quo diximus, quod omnium fidem superare videtur.

Quot naues ferrēt aureos ducatos ex quatrinis, qui replerent 64. loca eo modo quo de granis frumenti dictū est. Et quot globos terræ ac maris dictæ naues tegerent.

Iam vero si grana illa sint quatrini, efficiemus ex illis aureos ducatos sequentes numero.

24881766813713858585844771673I.

Quoniam autem supra diximus, vnam nauē commode ferre ducatos aureos 18000000. si illos per hos diuidamus, deprehendemus naues has 1382320378539658810324. necessarias esse, vt dictam pecuniam ferrent, quæ tot superficies terræ marisque contegerent, quot sunt in hoc numero 128616267 6. vnitates; propterea quòd supra posuimus 107476325000 2. naues vnam superficiem terræ ac maris contegere. Quæ summa pecuniæ omnem captū ingenij humani excedit.

Pari

Qua ratione facile inueniatur summa 40. terminorũ progressionis Geometricæ proportionis duplæ ab 1. incipientis.

Pari ratione, si quis optet summam 40. terminorum eiusdem progressionis, accipiẽda primum erit summa horum 5. terminorũ 1. 2. 4. 8. 16. nempe 31. Deinde, addita 1. multiplicandum aggregatum 32. in se, abiecta enim vnitate ex producto numero, fiet summa 10. terminorum 1023. Rursus 1. si aggregatum multiplicetur in se, & ex producto numero re[illegible]iatur 1. exurget summa 20. terminorum 1048575. Postremo, addita rursus 1. si aggregatum in seipsum multiplicetur, & ex producto numero dematur 1. producetur summa 40. terminorum, videlicet 1099511627775.

Quanti cõstet 40 oppida, si vendãtur ita vt pro primo soluatur 1. quatr. pro secũdo 2. quatri pro tertio 4. &c.

Atque tot quatrinos reciperet Dux aliquis, qui 40. oppida sua ea lege diuenderet, vt ei pro primo solueretur 1. quatrinus, pro secũdo 2. quatr. pro tertio 4. & ita deinceps progrediendo semper per proportionem duplã. Hi autem quatrini conficiunt aureos 2748779069$\frac{175}{400}$. Quod si hac pecunia emerẽtur redditus annui, ita vt 100. aurei tantum lucrifacerent 5. aureos (cum tamen lege ordinaria plus lucrẽtur) haberentur aurei hi 137438953. & baioch. 47$\frac{3}{16}$. quantos redditus nullius vnquam Monarcha, aut Resp. habuit: vt non insanus iudicandus sit Dux ille, (vt plerisque, qui in Arithmeticis parum sunt exercitati, videtur) qui ea ratione 40. sua oppida diuendit, sed sapientissimus.

Quo modo breuiter eliciatur sũma 24. terminorum progressionis Geo-

Postremo si quis cupiat expedite summam habere 24. terminorum eiusdem progressionis, sumenda erit primum summa trium horum terminorum 1. 2. 4. quæ est 7. Deinde, addita 1. multiplicandum aggregatum in se, & à pro-

& à producto numero auferenda 1. vt habeatur summa 6. terminorum 63. Addita rursus 1. multiplicandū aggregatum in se, & auferēda 1. ex numero producto, vt fiat summa 12. terminorum 4095. Tandem, addita rursus 1. multiplicandum aggregatum in se, & 1. subducenda ex numero procreato, vt exurgat summa 24. terminorum 16777215. Non ergo ridendus esset, qui bellicosum equum, qui in pedibus habet 24. clauos, ita venderet, vt ei pro primo clauo soluatur 1. quatr. pro secundo 2. pro tertio 4. pro quarto 8. &c. Nam reciperet pro equo 16777215. quatr. qui conficiūt 419430 $\frac{1}{2}$. aur. pro quo pretio vnusquisq; libenter suū equū daret. Hæc paucca de progressionibus dicta sint satis. Multo enim plura de eisdem scribemus in pleniore nostra Arithmetica.

metricæ pportionis duplę ab 1. incipientis.

Quanti constet equus habens 24. clauos in pedibus, si ita vendatur, vt detur 1. quatri. p primo clauo, & 2. p secūdo & 4. p tertio, &c.

EXTRACTIO RADICIS QVADRATAE.

CAP. XXVI.

NVmerus quadratus dicitur, qui ex aliquo numero in seipsum multiplicato producitur. qualis est 4. qui ex multiplicatione numeri 2. in seipsum gignitur. Item 9. cū ex 3. in se producatur. Item 2209. quia generatur ex multiplicatione 47. in se, &c. Vnitas quoque ab Arithmeticis numerus quadratus, licet improprie, apppellatur, propterea quod ex 1. in se producatur. Numerus autem, qui in se multiplicatus, producit quadra-

Quadrat⁹ numerus quid.

Radix quadrata quid.

quadratum numerum, vocatur latus, siue radix quadrati.

Extractio radicis quadratæ quid.

Extractio igitur radicis quadratæ est inuẽtio numeri, qui in se multiplicatus producat numerum propositum, si quadratus est, vel, si non est quadratus, maximum numerũ quadratum in eo contentum. Vt extractio radicis quadratæ ex numero 2209. est inuentio numeri 47. quia hic in se multiplicatus producit propositum numerum 2209. Item extractio radicis quadratæ ex numero 3375. est inuentio numeri 58. quia hic in se multiplicatus gignit numerum quadratum 3364. qui est omnium maximus in 3375. contentus. Nam proxime maior quadratus numerus, cuius latus, siue radix est 59. vna vnitate maior, quàm 58. est 3481.

Quomodo numerus, cuius radix quęritur, pũctis sit signandus.

Primum autem numerus propositus, cuius radix inuestiganda est, signandus est punctis quibusdam, posito puncto sub prima figura ad dextram, vel supra primam figuram, & alio sub tertia, & alio sub quinta, & ita deinceps sub septima, nona, & sub alijs locis imparibus: ita vt quodlibet punctum habeat duas figuras, illam videlicet, sub qua punctum signatum est, & aliam, quæ hanc versus sinistrã præcedit; excepto vltimo puncto ad sinistram, quod aliquando vnicam figuram habet, quando nimirum numerus figurarum est impar.

Quot figuras habeat radix propositi numeri.

Tot autem figuras habebit radix propositi numeri, quot puncta signata sunt. Vt hic numerus 2 1 1 7 8 4 0 4. ita signabitur, habebitque eius · · · · radix quatuor omnino figuras. Hic autẽ numerus 456789012. ita · · · · · signa

ſignabitur, eiuſque radix 5. figuris ſcribetur.

Signato hac ratione numero, ita radix ipſius eruetur. Sub vltimo puncto ad ſiniſtram ponitur radix maximi quadrati in figuris ad illud punctum ſpectantibus contenti, quæ maior eſſe non poteſt, quam 9. eademque radix ſcribitur ad dexteram numeri propoſiti poſt hanc lineam curuam (.vt de diuiſione integrorum numerorum diximus: atque hæc radix, inſtar Quotientis figuræ, per radicem ſub puncto poſitam, inſtar diuiſoris, multiplicatur, productuſque numerus ex ſupraſcripto numero ſubtrahitur, deletis prius figuris, à quibus fit ſubtractio, vna cum radice ſub puncto notata, quemadmodum in diuiſione integrorum docuimus. Numerus autem reſiduus non poteſt eſſe maior, quam duplus radicis ſub puncto poſitæ.

Quo pacto radix quadrata ex dato numero eruatur.

Poſt hæc duplicatur radix inuenta, ſcribiturque numerus hic duplicatus ſub ſequenti puncto, hoc ordine, vt prima eius figura ponatur ſub figura, quæ proxime punctum vltimum ſequitur verſus dextram, aliæ vero, ſi quæ ſint, ordine ſuo verſus ſiniſtram progrediendo, ita vt ſub figura, ſub qua ſequens punctum ponitur, nihil ſcribatur. Sub ea enim ponenda eſt noua figura Quotientis. Poſito hac ratione numero illo duplicato, diuiditur per illum numerus ſupraſcriptus, Quotientiſque figura ad dexteram poſt propoſitum numerum ſcribitur, atque etiam ſub puncto, vt fiat quaſi integer diuiſor ex duplicato illo numero; & figura hac Quotientis. Quo facto, multiplicatur figura hęc Quotientis in

tis in totum illum diuisorem, vt in diuisione integrorum, productusque numerus ex suprascripto numero subducitur, &c. Antequã autem figuram hanc nouam Quotientis scribas, tentandum prius erit, num ea multiplicata in duplicatum illum numerum, & in seipsam positam post illum numerum duplicatum, talem numerum producat, qui à supraposito numero possit subtrahi.

Rursus eodem modo totus numerus post lineam hanc curuam (hactenus positus duplicatur, duplicatusque numerus sub sequẽti puncto scribitur eo ordine, quẽ supra præscripsimus, ita vt rursus sequens punctum vacuum relinquatur pro noua figura Quotientis. Per hunc numerum vero duplicatum diuiditur suprascriptus numerus, sumiturq; talis figura pro Quotiente, quæ in numerum illum duplicatum, & in seipsam post illum numerum duplicatum positam multiplicata, numerum procreet, qui ex suprascripto numero detrahi possit.

Pari ratione totus numerus in Quotiente hactenus positus, duplicatur, & reliqua fiũt, vt prius: atque ita deinceps, donec omnia puncta sint absoluta. Verum hæc omnia exẽplis fient clariora.

Sit eruenda radix quadrata ex numero 2117840 4. Notatis punctis, vt supra dictum est, pono sub vltimo ad sinistram figuram 4. tanquam radicem maximi quadrati in suprascripto numero 21. contenti, (quadratus enim nume-

```
  5.
2̶1̶178404 (46
 .  .  .  .
4̶86.
```

rus ma-

rus maioris radicis, nempe 5. est 25.) eamq́ue rursus scribo post lineam hãc curuam (. Multiplicata autem figura 4. in Quotiente per figuram 4. sub puncto, fiunt 16. quæ ex 21. sublata, vt in diuisione integrorum præcepimus, relinquunt 5. spectabuntq́ue ad sequens punctum tres hæ figuræ 517.

Deinde duplicata figura Quotientis 4. vt fiant 8. scribo 8. sub 1. vt in exemplo vides; diuidoque 51. per 8. & inuenio 8. contineri in 51. sexies: Pono ergo 6. tã in Quotiente post 4. quàm sub puncto figuræ 7. Multiplicata autẽ figura hac Quotientis 6. per totum diuisorem 86. productoque detracto ex suprapoſito numero 517. remanet 1. pertinebuntq́ue hæ tres figuræ 184. ad sequẽs punctum.

```
   851
 21178404(460
 .  .  .  .
  48620
    9
```

Rursus duplicato Quotiente 46. hactenus inuento, vt fiant 92. scribo 2. sub 8. & 9. sub 1. vt in exemplo vides; diuidoque 18. per 92. Sed quia 92. non continetur in 18. pono 0. in Quotiente, & sub pũcto figurę 4. deleoq; totũ diuisorem 920. spectabit aũt ad postremum punctum totus hic numerus 18404.

```
   851
 21178404 (4602
 .  .  .  .
  4862002
    092
```

Postremo duplicato Quotiente 460. hactenus ineuto, vt fiãt 920. scribo 0. sub 0. & 2. sub

V 4. & 9.

4. & 9. ſub 8. vt vides in exemplo. Diuidendo aũt 1840. per 920. inuenio hunc numerum in illo cõtineri bis. Pono ergo figuram 2. tam in Quotiente, quam ſub puncto primæ figuræ 4. Multiplicata vero hac figura 2. per totũ diuiſorem 9202. productoq; numero dempto ex numero ſupraſcripto, nihil ſupereſt. Radix ergo quadrata numeri propoſiti eſt 4602. ipſeque numerus propoſitus quadratus eſt, cum nihil ſuperfuerit poſt vltimam ſubtractionem factam.

```
   831
21178404 (4602
 .  .  .  .
 486202
    902
```

Sit rurſus inquirenda radix quadrata ex numero 456789012. Signatis punctis, vt docuimus, ſcribo ſub vltimo puncto ad ſiniſtram figuram 2. tanquam radicẽ maximi quadrati in ſupraſcripto numero 4. contenti, eamque rurſus pono in Quotiente.

```
456789012 (21
 .  .  .  .  .
2 41
```

Multiplicata autem figura 2. in Quotiẽte per figuram 2. ſub puncto, fiunt 4. quæ ex 4. ſubducta nihil relinquunt, pertinebunq; hæ duæ figuræ 56. ad punctum ſequens.

Duplicata figura Quotientis 2. fiunt 4. quæ ſcribo ſub 5, relicto puncto ſequenti vacuo pro noua figura Quotientis. Diuidendo autem 5. per 4. inuenio Quotientem 1. quem ſcribo tam poſt Quotientẽ 2. quã ſub

```
  15
456789012 (213
 .  .  .  .  .
2412 3
  4
```

puncto

puncto figuræ 6. Multiplicata autem figura hac Quotientis 1. per totum diuiſorem, ablatoque numero producto ex 56. remanent 15. ita vt ad ſequens punctum ſpectent quatuor hæ figuræ 1578.

Deinde duplicato Quotiente 21. hactenus inuento, vt fiant 42. pono 2. ſub 7. & 4. ſub 5. Diuidendo autem 157. per 42. reperio Quotientem 3. quẽ pono & in Quotiente, & ſub puncto figuræ 8. Multiplicata autem hac figura Quotientis 3. per totum diuiſorem 423. ſubtractoque numero producto ex 1578. relinquuntur 309. Pertinebunt ergo ad ſequens punctum quinque iſtæ figuræ 30990.

```
      30
     1519
  456789012 (2137
  .  .  .  .  .
  2412367
     442
```

Rurſus duplicato Quotiente 213. hactenus inuento, vt fiant 426. ſcribo 6. ſub 9. & 2. ſub 9. & 4. ſub 0. Diuidendo autẽ 3099. per 426. inuenio Quotientem 7. quẽ ſcribo tam in Quotiente, quam ſub puncto figuræ 0. Multiplicata vero hac Quotientis figura 7. per totum diuiſorem 4267. detractoque producto numero ex 30990. remanent 1121. atque adeo ad punctũ ſequens pertinebunt ſex hæ figuræ 112112.

```
        1
       21
     3052
    151071
  456789012 (21372
  .  .  .  .  .
  241236742
     44227
        4
```

Postremo duplicato Quotiente 2137. hactenus inuento, vt fiant 4274. colloco 4. sub 1. & 7. sub 1. & 2. sub 2. & 4. sub 1. Diuidendo autem 11211. per 4274. reperio Quotientē 2. quem scribo & in Quotiente, & sub puncto figuræ 2. Multiplicata autē hac Quotientis figura 2. p totum diuisorem 42742. & dempto producto numero ex 112112. supersunt 26628. Numerus ergo propositus quadratus non est, ac proinde Quotiens

```
          2
         136
        2186
       308272
      15107138
     456789012   (21372
     .  .  .  .  .
      241235042
        44227
          4
```

inuentus 21372. non est eius radix, sed alterius numeri, qui est maximus quadratus in dato numero comprehensus, qualis est numerus 456762384. Nā proxime maior quadratus, qui videlicet habet radicem vna vnitate maiorē radice inuenta 21372. constituit numerum maiorem proposito numero.

Extractio radicis quadratæ p Dandā.

Potest etiam fieri radicis quadratæ extractio, more Italorū per Dandā, vt in diuisione numerorum integrorū explicauimus, qui modus securissimus est. In eo enim omnis cōfusio vitatur, si forte nimis parua, magnaue figura accipiatur: propterea quod nullæ figuræ delentur. Modus autem est hic. Sit eruenda radix quadrata ex hoc numero 456789. signatis punctis, vt dictum est, pono in Quotiente figuram 6. radicem videlicet maximi

quadrati

quadrati in vltimo puncto 45. contenti, eandemque figuram 6. scribo ad dexteram, quemadmodum in diuisione per Dandam ad dextram quoq; diuisorem collocauimus: & dico. Ex 6. figura Quotientis in 6. figuram in parte dextra col locata fiunt 36. quæ

6
127
4567 89 (675. | 1345
9.
78.
1164.

ex 45. subtraho hoc modo. Quoniam 6. ex 5. detrahi nequeunt, detraho 6. ex 10. & residuo 4. addo 5. vt fiant 9. quæ sub 5. scribo, ac mente retineo 4. nimirum 3. propter 30. & 1. propter 10. quæ 4. subducta ex 4. nihil relinquunt, ideoque punctum subsequens erit 967.

Deinde duplicatur figura 6. inuenta, vt fiant 12. per quæ diuido sequens punctum 967. omissa tamen figura 7. sub qua punctum est scriptum: Et dico. In 9. continetur 1. septies (Nam octies contineri non potest) scribo ergo 7. tam in Quotiente, quam seorsum post diuisorem 12. atque figuram 7. multiplico in totum numerum 127. hoc modo ex 7. in 7. fiunt 49. Et quia 9. ex 7. detrahi non possunt, detraho 9. ex 10. relinquamq; 1. addo ad 7. vt fiant 8. quæ scribo sub 7. ita tamen vt figura 8. demissior sit quam 9. atque retineo 5. nimirum 4. propter 40. & 1. propter 10. Rursus ex figura 7. inuenta in 2. fiunt 14. additisque 5. quæ reseruauimus, efficio 19. Et quia 9. ex 6. subtrahi nequeunt, detraho 9. ex 10. & reliquæ 1. addo 6. vt fiant 7. sub 6. iuxta 8. scri-

benda, retineoque 2. nimirum 1. propter denam numeri 19. & 1. propter 10. à quibus detraximus 9. &c. Tandem ex eâdem figura 7. inuenta in 1. fiunt 7. additisque 2. quæ seruauimus, fiunt 9. qua subducta ex 9. nihil superest, idcirco nihil scribendum est sub 9. eritq; sequens punctum, quod est vltimum 7889.

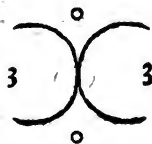
Postremo tota radix 67. hactenus inuenta duplicanda est, vt fiant 134. per quæ diuido punctum vltimum 7889. relicta tamen figura 9. supra punctum posita: Et dico. In 7. continetur 1. quinquies. Pono ergo 5. in Quotiẽtem, & post diuisorem 134. & figuram 5. duco in totum numerum 1345. hoc modo. Ex 5. in 5. fiunt 25. ablatisque 5. ex 9. supersunt 4. quæ pono sub 9 & reseruo 2. propter 20. Atque iterum dico. Ex figura 5. inuenta in 4. fiunt 20. additisque 2. quæ seruauimus, fiunt 22. Detractis autem 2. ex 8. supersunt 6. quæ sub 8. scribo: & mente retineo 2. propter 20. siue duas denas. Rursus dico. Ex inuenta figura 5. in 3. fiunt 15. additisque 2. quæ seruata sunt, fiunt 17. Demptis autem 7. ex 8. remanet 1. quam pono sub 8. & reseruo 1. propter 10. siue propter vnam denam. Tandem dico. Ex eadem figura 5. inuenta in 1. fiunt 5. additaq; 1. quã seruauimus, fiunt 6. quæ subtracta ex 7. relinquunt 1. quã sub 7. pono. Atque ita tota radix inuenta est 675. supersuntque 1164. Ex quibus formatur fractio hæc $\frac{1164}{1351}$. ita vt radix propinqua (vt in appropinquatione radicũ in sequenti cap. dicemus) sit $675\frac{1164}{1351}$. minor tamen; quam vera, cum eius quadratus numerus hic tantummodo $456788\frac{1607533}{1825201}$.

Atque

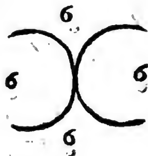
Atque modus hic extractionis præclarus est: quippe cum in eo omnia residua operationum distinctè, & sine confusione appareant. adeo vt si in Quotientem accepta forte esset figura nimis magna, aut parua, (nimis quidẽ magna foret, si numeri producti à puncto proposito subtrahi nõ possent, nimis vero parua, si facta subtractione, residuũ maius esset duplo radicis inuẽtæ) facili negotio error possit corrigi, quemadmodum supra in Diuisione per Dandam dictum est.

Examen extractionis radicis quadratæ triplex est, quemadmodũ & diuisionis integrorum. Primum .n. fit per abiectionem 9. alterũ per abiectionem 7. & tertium per multiplicationem, vt in diuisione integrorum dictũ est. Sed radix inuenta accipienda est hic loco diuisoris: quia si numerus propositus diuidatur per radicem inuentam, fiet Quotiens eadem radix: Et si quid superfuerit in extractione radicis, idem supererit in diuisione, dummodo in Quotiente sumantur eædem figuræ radicis inuentæ, licet in vltima diuisione partiali maior aliquando figura sumi posset, quando nimirum residuum extractionis radicem excesserit. Itaque prius exemplum ita examinabitur per 9. Reiectis 9. ex radice 4602. remanent 3. quę in vtroque latere crucis scribo, propterea quod radix est & diuisor, & Quotiens, vt diximus. Multiplicatis iam inter se duabus hisce figuris 3. & 3. fiunt 9. reiectisque 9. remanet o. in superiori par-

Examen extractionis radicis quadratæ triplex.



ri parte crucis collocanda. Tandem reiectis 9. ex proposito numero, remanet etiam o. Posterius autem exemplum ita examinabitur per 9. Reiectis 9. ex radice 21372. remanent 6. in vtroque latere crucis ponenda. Multiplicatis autem inter se hisce figuris 6. & 6. fiunt 36. reiectisque 9. ex 36. & ex residuo extractionis, supersunt 6. Tantundem remanet, si reijciantur 9. ex dato numero.



Quod si multiplicetur radix prioris numeri in se, producetur idem numerus prior. Item si radix numeri posterioris in se multiplicetur, productoq; numero addatur residuũ extractionis, gignetur idẽ numerus posterior.

Residuũ in extractione quadratæ radicis maius esse nõ pot est quàm duplum radicis inuentæ.

Obiter etiam hic aduertendum est, in nulla extractione radicis quadratæ residuum, si quod est maius esse posse, quàm duplum radicis inuentæ. Si enim superaret duplum radicis inuentæ, vel vna vnitate, haberet numerus propositus radicem vna vnitate maiorem illa, quæ inuenta est. Ratio huius rei est, quòd quilibet quadratus superat proxime minorem numerum quadratum duplo radicis ipsius minoris quadrati, & insuper vna vnitate; adeo vt, si addatur 1. ad duplum radicis cuiusuis quadrati, & hoc aggregatum ad quadratum proxime minorem, fiat quadratus proxime maior. Vt quadratus numerus 64. superat numerum quadratum 49. numero 15. Constat autẽ numerum 14. duplum esse radicis quadrati 49. quæ est 7. superesseq;

Quæ sit differẽtia inter duos quadratos ꝓximos.

vnam

vnã adhuc vnitatẽ in 15. ac proinde, si addatur 1. ad 14. duplum radicis 7. & hoc aggregatum ad 49. fieri quadratum numerum 64. proximè maiorem, quàm 49. cuius radix est 7. Si igitur proponat quis numerum 63. vt eius radix quadrata eruatur, reperietur radix 7. supereruntque 14. quæ radicis sunt dupla: Si vero quis proponeret numerum 64. inueniretur q; radix 7. erratum esset, quia superessent 15. quæ maiora sunt, quàm duplum radicis 7. Quare radix numeri 64. erit 8.

APPROPINQVATIO RADICVM IN numeris non quadratis.

CAPVT XXVII.

QVoniam cum numerus propositus non est quadratus, inuenta radix in se multiplicata producit numerum minorem numero ipso, quemadmodum in posteriori exemplo patuit, vbi radix in se multiplicata gignit numerum, qui à numero proposito superatur toto hoc numero 26628. monstrabimus hoc loco duplicem viam, qua radix propinquior inueniatur, ita vt eius numerus quadratus à proposito numero non quadrato insensibili fere differentia distet. Vera enim radix numero exprimi non potest, sed solum per lineam, vt in pleniore nostra Arithmetica demonstrabitur. Priori via reperietur radix propinquior quidem in infinitum, sed tamẽ minor, quam vera; adeo vt eius quadratus numerus semper à numero proposito superetur. Posteriori via inuenietur radix

propinquior quoque in infinitum, sed quæ veram excedat; ita vt eius numerus quadratus maior semper sit numero proposito. Vtraque porrò via demonstrata est Geometricè & à Theone Alexandrino in lib. 1. Almagesti Ptolemæi, & à Federico Commandino in lib. Archimedis de dimensione circuli.

Quo modo inueniatur radix ꝓpinqor, quæ tamẽ minor sit quã vera.

Prior ergo via ita se habet. Inuenta radice maximi quadrati in proposito numero cōprehensi, adijciatur ad eam fractio, cuius numerator est residuum extractionis, quo nimirum propositus numerus quadratum numerū proxime minorem quem radix inuenta producit in se multiplicata, excedit, denominator vero duplum radicis inuentæ, & prætérea vnitas, qua nimirum radix numeri quadrati, qui proxime maior est proposito numero, superat radicem inuentam numeri quadrati, qui proxime minor est numero proposito. Hac enim ratione composita erit radix multo propinquior, quam inuenta, minor tamen, quam vera. Ad quam si addatur id, quod prouenit ex diuisione excessus, quo propositus numerus non quadratus excedit quadratū radicis propinquioris iam inuentæ, per numerum compositum ex duplo eiusdem radicis propinquioris, & excessu, quo radix quadrati numeri proxime maioris superat radicem propinquiorem inuentam, exurget radix adhuc propinquior, minor tamen, quam vera. Ad quam si iterum apponatur id, quod prouenit ex diuisione excessus, quo propositus numerus non quadratus superat quadratum radicis propinquæ vltimo loco inuētæ, per numerum cōpositum

situm ex duplo eiusdem vltimæ radicis propinquæ, & excessu, quo radix quadrati numeri proxime maioris excedit radicem eandem vltimam propinquam, efficietur adhuc propinquior radix, minor tamen, quam vera. Atque hoc modo licebit semper inuenire radicem propinquiorem in infinitum, nunquam tamẽ vera radix inuenietur, sed semper radix aliquanto minor, quam vera.

Exemplum. Sit propositus numerus non quadratus 20. Radix quadrati proxime minoris est 4. quæ in se multiplicata producit 16. supersuntque 4. Si ergo ad radicem 4. addatur fractio $\frac{4}{9}$. cuius numerator est residuum illud, denominator vero duplum inuentæ radicis 4. & præterea 1. fiet propinquior radix $4\frac{4}{9}$. Huius enim quadratus numerus est $19\frac{61}{81}$. qui minor quidem est, quam propositus numerus 20. sed minus ab eo differt, quam quadratus numerus 16. radicis primæ 4.

Ablato hoc quadrato $19\frac{61}{81}$. ex numero proposito non quadrato 20. supersunt $\frac{20}{81}$. Item radix 5. quadrati proxime maioris numero proposito, excedit radicem propinquam $4\frac{4}{9}$. proxime inuentam hac minutia $\frac{5}{9}$. quæ addita ad duplum radicis propinquæ $4\frac{4}{9}$. hoc est, ad $8\frac{8}{9}$. facit numerum $9\frac{4}{9}$. per quem si diuidatur residuum illud $\frac{20}{81}$. fiet Quotiens $\frac{180}{6885}$. qui additus ad radicem propinquã $4\frac{4}{9}$. proxime inuẽtam faciet radicem propinquiorẽ $4\frac{29160}{61965}$. hoc est, $4\frac{8}{17}$. Huius enim numerus quadratus est $19\frac{285}{289}$. qui minor quoque est, quam numerus propositus 20. non quadratus, sed magis ad eum accedit, quam quadratus $19\frac{61}{81}$. radicis

$4\frac{4}{9}$. an-

$4\frac{4}{9}$. ante hanc radicem $4\frac{8}{17}$. inuentæ.

Rursus subtracto hoc quadrato numero $19\frac{285}{289}$. ex proposito numero 20. non quadrato, supersunt $\frac{4}{289}$. Item radix 5. quadrati proxime maioris numero proposito excedit radicem propinquam $4\frac{8}{17}$. vltimo inuentam minutia hac $\frac{9}{17}$. quæ addita ad duplum vltimæ radicis propinquæ $4\frac{8}{17}$. hoc est, ad $8\frac{16}{17}$. facit numerũ $9\frac{8}{17}$. per quem si diuidatur residuum illud $\frac{4}{289}$. fiet Quotiens $\frac{68}{46529}$. qui additus ad radicem propinquam $4\frac{8}{17}$. vltimo inuentam facit radicem propinquiorẽ $4\frac{373388}{790993}$. hoc est $4\frac{76}{161}$. Huius enim numerus quadratus est $19\frac{25901}{25921}$. qui minor quoq; est proposito numero 20. non quadrato, magis tamen ad eum accedit, quam quadratus $19\frac{285}{289}$. radicis propinquæ $4\frac{8}{17}$. ante hanc radicem $4\frac{76}{161}$. inuentæ. Atq; in hunc modum licebit semper magis ac magis ad veritatem accedere, ad quam tamen nunquam perueniemus, sed semper ab ea deficiemus.

Quomodo reperiatur radix ꝓpinquior, q̃ tamẽ maior sit, q̃ vera.

Posterior autem via hæc est. Inuenta radice maximi quadrati in proposito numero cõprehensi, adijciatur ad eam fractio, cuius numerator est residuum extractionis, quo nimirum propositus numerus quadratum numerũ proxime minorem, quem radix inuenta producit in se multiplicata, excedit, denominator vero duplum radicis inuentæ. Componetur enim hac ratione radix multo propinquior, quam inuenta, maior tamen, quam vera. A qua si auferatur id, quod prouenit ex diuisione excessus, quo quadratus numerus radicis propinquioris iam inuentę excedit numerum propositum, per duplum eiusdem radicis propinquio-

pinquioris, relinquetur radix adhuc propinquior, maior tamen, quam vera. A qua si rursus detrahatur id, quod prouenit ex diuisione excessus, quo numerus quadratus radicis propinquæ vltimo loco inuentæ superat numerũ propositum, per duplum eiusdem radicis vltimæ propinquæ, remanebit adhuc propinquior radix, maior tamen, quam vera. Atque hoc modo licebit semper inuenire radicem propinquiorem in infinitum, nunquam tamẽ vera radix inuenietur; sed semper radix aliquanto maior, quam vera.

Exemplum. Sit propositus idem numerus non quadratus 20. Radix quadrati proxime minoris est 4. quæ in se multiplicata facit 16. superſuntque 4. Si ergo ad radicem 4. adijciatur fractio $\frac{4}{8}$. cuius numerator est residuum illud, denominator vero duplum inuentæ radicis 4 fiet propinquior radix $4\frac{4}{8}$. hoc est, $4\frac{1}{2}$. Huius enim numerus quadratus est $20\frac{1}{4}$. qui maior quidem est, quam propositus numerus 20. sed minus ab eo differt, quã quadratus numerus 16. radicis primæ 4.

Iam vero, si $\frac{1}{4}$. excessus nimirum, quo numerus quadratus $20\frac{1}{4}$. radicis $4\frac{1}{2}$. proxime inuentę superat numerum propositum 20. diuidatur per duplum radicis propinquæ $4\frac{1}{2}$. iam inuentæ, hoc est, per 9. fiet Quotiens $\frac{1}{36}$. qui ablatus ex radice $4\frac{1}{2}$. proxime inuenta relinquet propinquiorem radicem $4\frac{34}{72}$. hoc est, $4\frac{17}{36}$. Huius enim numerus quadratus est $20\frac{1}{1296}$. qui maior quoque est numero proposito 20. sed minus ab eo distat, quam quadratus $20\frac{1}{3}$. radicis $4\frac{1}{2}$. $4\frac{1}{2}$. hanc inuentæ.

Quod

Quod si rursus $\frac{1}{1296}$. excessus nimirum, quo numerus quadratus 20$\frac{1}{1296}$. radicis 4$\frac{17}{36}$. proxime inuentæ superat propositũ numerum 20. diuidatur per duplum radicis 4$\frac{17}{36}$. iam inuẽtæ, id est, per 8$\frac{34}{36}$. hoc est per 8$\frac{17}{18}$. fiet Quotiens $\frac{1}{11592}$. qui subductus ex radice 4$\frac{17}{36}$. proxime inuẽta relinquet radicẽ ꝓpinquiorẽ 4$\frac{197028}{417312}$. hoc est, 4$\frac{5473}{11592}$. Huius enim quadratus numerus est sequens 20$\frac{1}{134374464}$. qui maior etiã est numero proposito 20. sed minus ab eo distat, quam quadratus 20$\frac{1}{1296}$. radicis 4$\frac{17}{36}$. ante hanc inuentæ. Atq; in hunc modum licebit semper magis ac magis accedere ad veritatẽ, ad quam tamen nunquam perueniemus, sed semper eam excedemus.

Alia Extractio radicis quadratæ propinquæ.

Libet hoc loco explicare aliam rationẽ inueniẽdi radicem satis propinquam per vnicã extractionem radicis, quæ Mathematicis valde familiaris est, atq; vsitata. Est autẽ eiusmodi. Post numerum cuius radix quæritur, apponantur aliquot binarij cifrarum vt 0000. vel 000000. vel 00000000. &c. quo autem plures cifrarum binarij apponantur, eo propinquior radix eruetur. Postea ex toto numero cum appositis cifris extrahatur radix, vt traditum est, ex qua ad dextrã tot figuræ abscindantur, quot binarij cifrarum appositi fuere ad numerum propositum. Reliquæ namq; figuræ radicem exhibebunt, vna cum minutia, cuius numerator erit numerus per figuras abscissas expressus, denominator autem erit 10. si vnus tantum binarius cifrarum fuit appositus vel 100. Si duo binarij fuere appositi, vel 1000. si tres binarij &c. ita vt fractio illa contineat

tineat vel decimas, vel centesimas, vel millesimas, &c.

Sit v. g. eruenda radix quadrata ex 20. Appositis tribus cifrarum binarijs, exurget numerus 20000000. cuius radix per Dandam eruta est 4472. (Negligimus hic residuum 1216) Demptis tribus figuris 472. ad dextera propter tres binarios Cifrarũ appositos, erit radix $4\frac{472}{1000}$. satis propinqua, minor tamen quam vera, cum eius quadratus numerus sit tantum $\frac{19998784}{1000000}$. hoc est $19\frac{998784}{1000000}$. qui paulo minor est numero dato 20. Quod si ad numeratorem adijcias 1. fiet radix $4\frac{473}{1000}$. maior quam vera, quippe cũ quadrat⁹ eius numer⁹ sit $20\frac{7729}{1000000}$ paulo maior dato numero 20.

20000000(4472 | 4
. . . . | 84
| 887
| 8942

4
64
191
1216

Hac porro ratione recte inueniri propinquã radicem quadratam, demonstratũ à nobis est in Geometria practica lib. 6. propos. 20.

Eadẽ hæc ratio locũ etiã habet in numeris fractis. Nam si tam Numeratori, quã Denominatori apponãtur aliquot Cifrarũ binarij, fiet ex radice Numeratoris illis Cifris aucti Numerator, & ex radice Denominatoris totidẽ Cifris aucti Denominator. Vt si desideretur radix hui⁹ minutiæ $\frac{2}{3}$. Additis duobus binarijs cifrarũ fit minutia $\frac{20000}{30000}$. Radix numeratoris est 141. & Denominatoris 173. Ergo radix propinqua minutiæ $\frac{2}{3}$. erit $\frac{141}{173}$. cuius quadrat⁹ numerus est $\frac{19881}{29929}$. paulo minor quã $\frac{2}{3}$. & sic de alijs.

Extractio radicis quadratæ propinquæ ex minutijs.

Lege

Lege quæ in Geometria practica lib. 4. ca. 2. num. 5. & lib. 6. propos. 21. scripsimus. Ibi enim reperies rationem facilem extrahendi radicẽ quadratam ex qualibet minutia non quadrata.

EXTRACTIO RADICIS CVBICAE.

Caput XXVIII.

Numerus Cubus quid.

CVbus est numerus qui ex aliquo numero in se ipsum multiplicato, deinde in productum gignitur, qualis est 8. qui ex multiplicatione numeri 2. in se ipsum, & in productum numerum 4. producitur. Item 27. qui producitur ex 3. in se, & in productũ 9. Itẽ 103823. quia gignitur ex 47. in se, & in productum 2209. &c. Vnitas quoq; ab Arithmeticis numerus cubus, licet improprie, nominatur, propterea quod ex 1. in se, & in productum 1. producitur. Numerus autem, qui in se multiplicatus, & in productum, cubum procreat, vocatur latus, siue radix cubi.

Extractio radicis cubicæ qd.

Extractio igitur radicis Cubicę ex dato numero est inuentio numeri qui in se primùm multiplicatus, deinde in productũ procreet datum numerum, si cubus est, vel si nõ est cubus, maximum numerum cubum in eo contẽtum. Vt extractio radicis cubicæ ex numero 59319. est inuentio numeri 39. quia hic in se ductus, & in productum 1521. gignit numerum 59319. propositum. Item extractio radicis cubicæ ex numero 116592. est inuẽtio numeri 48. quia hic in se ductus, & in productum 2304. producit numerũ 110592. qui est maximus cubus

bus in dato numero 116592. contentus: quippe cum proximè maior cubus, cuius latus, siue radix est 49. vna vnitate maior quā 48. sit 117649. Difficilior autem est extractio radicis cubicę, quam quadratæ, & quā varijs vijs præscribunt Auctores. Nos eam trademus, quam nouam quodammodo lib. 6. Geometriæ Practicæ ad finem propos. 19. extraximus. Est autem eiusmodi.

Quomodo numerus, cuius radix q̄ritur punctis sit signandus.

Primùm numerus propositus, cuius radix cubica eruenda est, signandus est punctis quibusdam, posito puncto sub prima figura ad dextram, vel supra ipsam figuram & alio sub quarta figura omissis duabus figuris in medio, atque alio sub septima, omissis duabus alijs in medio, & sic deinceps sub decima, decima tertia, &c. relictis semper duabus figuris post quodlibet punctum, ita vt quoduis punctum habeat tres figuras, illam videlicet, sub qua punctum est signatum, & alias duas, quæ hanc versus sinistram præcedunt, excepto vltimo puncto ad sinistram, quod aliquando vnicam figuram habet, aliquando vero duas tantum. Tot autem figuras habebit radix propositi numeri, quot puncta signata sunt. Vt hic numerus 256047896. signabitur, vt in hac formula cernis, habebitque eius radix cubica tres figuras. Hic vero numerus 34567890012786. ita signabitur, eiusque radix quinq; figuris scribetur.

Quot figuras habeat radix cubica dati numeri.

2 5 6 0 4 7 8 9 6
· · ·

34567890012786
· · · · ·

Deinde in promptu esse debet apposita hæc tabella continens cubos nouem figurarum Arithmeticarum vt primum, punctum ad

Quo pacto radix cubica ex dato numero eruatur.

sinistram expediri possit. Quibus paratis sit eruenda radix cubica ex numero 256047896. Notatis pun- · · · ctis vt diximus, ex primo puncto 256. ad sinistram subtraho cubum 2 1 6. (cuius radix 6.) maximum in eo contentũ. Et quia remanent 40. erit sequens punctũ 40047. & prima radicis figura 6.

Radices	Cubi
1.	1
2.	8
3.	27
4.	64
5.	125
6.	216
7.	343
8.	512
9.	729

Paro diuisorem, multiplicãdo quadratum radicis 6. cubi subtracti, nimirum 36. per 300. qui erit 10800. per quem si diuidam meum punctum 40047. inueniam Quotientem 3. pro secunda figura radicis. Hãc duco in 10800. diuisorem inuentum, facioq; 32400. Deinde duco quadratũ nouæ figuræ inuentę 3. nimirũ 9. in productũ ex prima figura inuẽta 6. in 30. videlicet in 180. facioq; 1620. Postremo ad sũmã duorũ horũ productorũ 32400. 1620. id est, ad 34020. adijcio cubũ inuẽtæ nouę figurę 3. nimirũ 27. totãq; sũmã 34047. ex meo puncto 40047. subtraho. Et quia supersunt 6000. erit vltimũ punctum 6000896. scribo ergo inuentã figurã 3. post priorem 6. id est, post radicem maximi cubi 216. ex primo puncto subtracti.

Radix propositi numeri 635.

32400
1620
34020
27
34047
40047
34047
6000

Post hæc paro eodem modo diuisorem nouum pro vltimo pũcto, hoc modo Quadratũ

totius

totius radicis 63. hactenus inuētę hoc est 3969. duco iterum in 300. Productus namq; numerus 1190700. erit diuisor, per quē si diuidā meū punctum 6000896. reperiam Quotientem 5. scribendum post radicem 63. hactenus inuentam. Hanc figuram 5. inuentam similiter duco in diuisorem inuentum 1190700. facioque 5953500. Deinde quadratum eiusdem nouæ figuræ 5. nimirum 25. duco in productum ex radice 63. prius inuenta, multiplicata per 30. hoc est in 1890. efficioq; 47250. Postremo ad summam horum duorum productorū 5953500. 47250. adijcio cubū 125. figurę 5. inuentę,

5953500
47250
125
6000875

ac totam summā 6000875 ex meo puncto subtraho, .i. ex 6000896. supersuntq; 21. Numerus ergo propositus cubus nō est, ac proinde Quotiens inuentus 635. non est eius radix cubica, sed alterius numeri qui est maximus cubus in dato numero comprehensus, qualis est, 256047875. Nā proxime maior cubus habens radicē vna vnitate maiorem radice inuenta 635. constituit numerū maiorem proposito numero.

Quod si superesset aliud punctum, ducendus esset quadratus totius radicis 635. hactenus inuentæ in 300. vt nouus diuisor exurgeret, &c. Ex hoc porro exemplo declarato satis puto intelligi regulam nostram pro extractione cubica ab aliorum quidem regulis nonnihil differentem, sed meo iudicio faciliorem.

Sciendum autem est, in nulla Extractionē radicis cubicæ residuū, si quod est, maius esse posse, Quantum possit esse

residuum in Extractione Cubica.

posse, quam triplum quadrati radicis inuentæ, vna cum triplo eiusdem radicis: alias haberet numerus propositus radicem vna vnitate maiorem illa, quæ inuenta est. Ratio est, quod quilibet cubus superat proxime minorem cubum triplo quadrati ex radice minoris cubi producti, vna cum eiusdem radicis triplo, & insuper vna vnitate, adeo vt si addatur 1. ad triplum quadrati ex radice cuiusuis cubi producti, & ad triplum eiusdem radicis, atque hæc summa ad eum cubum adijciatur, fiat cubus proxime maior. Vt cubus numerus 27. superat cubum 8. numero 19. Constat autem numerum 18. conflatum esse ex triplo quadrati radicis 2. hoc est ex 12. & ex triplo ipsius radicis 2. nimirum ex 6. atque adeo, si addatur 1. confici differentiam inter duos cubos proximos 8. & 27.

Quãta sit differẽtia inter duos cubos proximos.

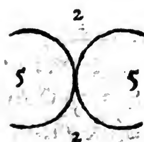
Quo pacto cognoscatur, num figura sumpta sit nimis parua in Quotiẽte.

Itaque si quando in Extractione tam magnus numerus fuerit residuus, vt dubites, te in Quotiente figuram sumpsisse nimis paruam (Nam ipsa operatio, quando subtractio fieri nequit, docet nimis magnam fuisse figuram assumptam) capiendum est triplum quadrati radicis ad eam vsque operationem inuentæ, vna cum triplo eiusdem radicis. Si enim summa horum duorum numerorum minor fuerit residuo extractionis, scito, te nimis paruam figuram in Quotientem sumpsisse. Si vero dicta summa æqualis fuerit residuo, vel maior, recte in Quotiente figuram fuisse assumptam. Idem cognos-

gnosces si periculum feceris cum figura maiore. Si namque multiplicationes fiant, vt in regula præcipitur, & subtractio fieri non possit, recte accepta fuit figura prior, si vero fieri possit subtractio, figura accepta fuit nimis parua.

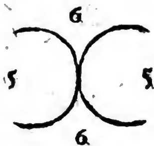
Examen extractionis radicis Cubicę tribus etiã modis fieri potest, vt & diuisionis integrorum, & Extractionis radicis Quadratæ: primo videlicet modo per abiectionem 9. altero per abiectionem 7. ac tertio per multiplicationẽ, vt in diuisione integrorum dictum est: sed radix inuenta sumenda hic est pro diuisore. Vt exemplum superius ita per 9. examinabitur. Reiectis 9. ex radice 635. remanent 5. quæ in vtroq; latere crucis colloco: propterea quod radix loco diuisoris sumitur, & pro Quotiente, vt diximus. Multiplicatis iam duabus hisce figuris 5. & 5. inter se, & producto 25. ducto in eandem figuram 5. vt gignatur Cubus 125. figuræ 5. atq; ex hoc cubo vna cum residuo extractionis 21. reiectis 9. supersunt 2. collocanda in superiori parte Crucis. Et quia si abijciãtur 9. ex numero proposito, remanent quoq; 2. in inferiori parte Crucis scribenda, rectè fuit radix extracta.

Probatio Extractionis radicis cubicæ triplex.



At per 7. ita idem exemplum examinabitur. Reiectis 7. ex radice 635. remanent 5. quæ in vtroque Crucis latere scribo. Multiplicata autem figura hac 5. cubicæ, & ex cubo

125. reiectis 7. supersunt 6. quæ addita ad o. nimirũ ad residuũ, q remanet si ex 21. residuo extractionis abijciantur 7. faciunt 6. Et quoniã supersũt etiã 6. si ex numero proposito abijciantur 7. rectius inuenta est radix cubica.



Quod si multiplicetur radix inuẽta 635. cubicè, hoc est primũ in se, deinde in productũ, numeroq; genito addatur residuũ 21. procreabitur propositus numerus, ex quo radix eruta fuit.

APPROPINQVATIO RADICVM IN numeris non cubis.

Caput XXIX.

Appropinquatio radicis cubicæ.

VT ex numeris, qui Cubi nõ sunt, propinqua radix eruatur, non est ad hanc vsq; diem inuenta via magis accurata, quã ea, quam in Geometria Practica lib. 6. cap. 20. demonstrauimus, quæ est eiusmodi. Numero proposito apponantur aliquot ternarij Cifrarum (quo autem plures Cifrarum ternarij apponentur, eo propinquior radix eruetur) & ex toto hoc numero radix cubica extrahatur, vt traditum est. Deinde ex ea radice abiectis ad dextrã tot figuris quot Cifrarum ternarij appositi fuere, reliquæ figuræ radicem integram dabunt, cui addenda est fractio numeratorem habens figuras abiectas, denominatorem vero vnitaté cum totidem Cifris, quot ternarij Cifrarum additi fuerunt, nimirum 10. si vnus ternarius fuit additus vel 100. si duo ternarij

narij additi fuerunt, vel 1000. si tres, & sic deinceps: ita vt fractio illa contineat, vel decimas, vel centesimas, vel millesimas. &c.

Exempli causa; Ex numero 2916o. qui cubus non est, eruenda sit radix cubica propinqua. Apponantur tres ternarij Cifrarum vt in fractione habeantur partes millesimæ, denominatæ videlicet à 1000. atque ex toto numero 29160000000000. extrahatur radix Cubica, quæ reperietur 30779. minor quam vera, quod in extractione fuerit aliquis numerus residuus, atque adeo maior radix, quam vera, erit 30780. Abiectis tribus figuris ad dexteram propter tres Cifrarum ternarios appositos, erit propinqua radix $30 \frac{779}{1000}$. minor, quam vera, cum eius cubus sit $29158 \frac{188419139}{1000000000}$. maior autem propinqua radix, quā vera, erit $30 \frac{780}{1000}$. quippe cum eius cubus sit $29161 \frac{230552000}{1000000000}$.

Ratio hæc locū etiā habet in numeris fractis. Nam si tam Numeratori, quam Denominatori apponantur aliquot Cifrarum ternarij, fiet ex radice numeratoris illis Cifris aucti Numerator, & Denominator ex radice Denominatoris illis Cifris aucti, quemadmodum supra de radice quadrata fractorum numerorum diximus.

Extractio radicis propinquæ Cubicæ ex minutijs.

Aliam rationē expeditam pro extrahenda radice cubica ex dato numero fracto reperies in nostra Geometria Practica lib. 6. Propositione 21.

Agendum iam esset de Extractione aliarum radicum, quæ infinitæ sunt, vt in nostra Geometria Practica proposit. 19. explicauimus.

uimus. Sed quoniam tractatio hæc difficilior est, inuentioq; radicis quadratæ, & Cubicæ magis est necessaria ad libros Archimedis, Ptolomęi, cęterorumq; Mathematicorũ intelligendos, consultò à nobis in pleniorem nostram Arithmeticam, & in Geometriam Practicam differtur. In ea namque Arithmetica pleniore, non solum omnes radices, cum earum appropinquationibus (quod in Geometria quoque practica lib. 6. fecimus) tractabimus, sed innumera alia, à quibus in hoc Compendio dedita opera abstinuimus, exponemus.

FINIS.

INDEX OMNIVM CAPITVM HVIVS ARITHMETICÆ.

INDEX EORVM, QVAE IN SINGVLIS CApitibus continentur.

IN PRAEFATIONE.

In numeratione integrorum numerorum.

In additione integrorum numerorum.

Proba-

In subtractione integrorum numerorum.

In multiplicatione integrorum numerorum.

In diuisione integrorum numerorum.

In numeratione fractorum numerorum.

In æstimatione siue valore fractorum numerorum.

Minutia-

In fractionibus fractorum numerorum.

In reductione fractorum numerorum ad minimos numeros, siue terminos.

Vnde

In reductione fractorum numerorum ad eandem denominationem, & ad integra, nec non integrorum ad fractionem quamcunq;, ac denique fractionum fractorum numerorum ad simplices fractiones.

In additione fractorum numerorum.

In sub-

In subtractione fractorum numerorum.

In multiplicatione fractorum numerorum.

In diuisione fractorum numerorum.

In insitione fractorum numerorum.

In quæstiunculis nonnullis numerorum integrorum, ac minutiarum.

In regula trium, quæ alio nomine regula aurea, siue regula proportionum dici solet.

In re-

In regula trium euersa.

In regula trium composita.

In regula Societatum.

In regula alligationis.

In regula falsi simplicis positionis.

In Extractione radicis quadratæ.

Extra-

In appropinquatione radicum in numeris non quadratis.

FINIS INDICIS.




RESTAURO DEL LIBRO
di LELLI
MARIO